Aprender las matemáticas egipcias

Ángel Sánchez Rodríguez

2014

Amigos de la Egiptología
www.egiptologia.com

Índice

Índice I
Los cálculos piramidales 195
Problema 56 del PMR 197
Problema 57 del PMR 199
Problema 58 del PMR 199
Problema 59 del PMR 200
Problema 59B del PMR 200
Problema 60 del PMR 201
Cálculo de volúmenes y superficies de cuerpos geométricos 205
Cálculo del volumen de un cilindro 205
Problema 41 del PMR 205
Problema 42 del PMR 206
Problema 43 del PMR 208
Problema 2 del PK 211
Cálculo del volumen de cubo 213
Problema 44 del PMR 213
Problema 45 del PMR 214
Cálculo del volumen de un ortoedro 218
Problema 46 del PMR 218
Problema 5 del PK según Gillings 219
Cálculo de la superficie de una semiesfera 223

Problema 10 del PMM 225
Cálculo del volumen de un tronco de pirámide 228
Problema 14 del PMM 229
Cálculo del volumen de un tronco de cono. Papiro de Oxyrhynchus 239
Como dibujaban un arco 247
Las Matemáticas en el papiro Reisner 1 251
Cálculo del volumen de un ortoedro 251
Placa G del PRI 251
Placa H del PRI 254
Placa I del PRI 257

Los cálculos piramidales

Se hace innecesario hacer hincapié en la importancia de los cálculos matemáticos relacionados con las pirámides, pues durante una gran parte de la historia de Egipto, desde la III dinastía hasta el I Periodo Intermedio, las planicies desérticas se llenaron de estos monumentos funerarios, y su correcto diseño era imprescindible para evitar derrumbes y males mayores. Algunas de estas ciclópeas construcciones no estuvieron exentas de traspiés, como puede ser el caso de la pirámide acodada o romboidal edificada por orden del rey Seneferu (Snofru) al sur de Meidum, donde parece que hubo un error inicial en el cálculo de su inclinación que tuvo que ser corregido con posterioridad. Al parecer un primer proyecto marcaba una inclinación con un ángulo de 58º con respecto a la horizontal que fue posteriormente corregida a 54º, para terminar el monumento con una mayor inclinación en la mitad superior (44º). Cabe la posibilidad de que no se tratara de un error sino de la construcción de una pirámide sobre una mastaba, lo que daría el mismo resultado.

Ilustración 1.Pirámide acodada o romboidal de Seneferu (Snofru) edificada al sur de Dashur.

Las pirámides egipcias son, desde el punto de vista geométrico, regulares, poliedros con una base cuadrangular y caras triangulares que finalizan en punta, coincidiendo la proyección del vértice con el centro del cuadrado que sirve de base.

El vocablo pirámide deriva del griego πυραμίς. Existe una hipótesis del egiptólogo Brugsch según la cual la palabra griega derivaría de *pr-m-ws* 'altura de la pirámide' (GRIFFITH F. L., 1894, pág. 237) (OBENGA, 1995, pág. 129).

En el PMR se encuentran una serie de problemas relacionados con el cálculo y uso de la **inclinación** de una pirámide, llamada **seqed** (*sqd*), que para nosotros estará relacionada con la **cotangente**[1] del ángulo diedro que forma una de las caras de la pirámide con la base de la misma, el cociente entre la mitad de la longitud de la base[2] (*wḫ3-ṯbt* ; lit.: 'buscar la sandalia') y su altura[3] (*pr-m-ws* ; lit.: 'lo que sale por la ventana').

$$cotangente = \frac{mitad\ de\ la\ base\ piramidal}{altura}$$

La inclinación es el valor de la cotangente multiplicado en palmos de la mitad de la base por codos de la altura, valor que se obtiene multiplicando por 7el valor de la cotangente.

$$inclinación = \frac{mitad\ de\ la\ base\ piramidal\ (codos)}{altura\ (codos)} x7\ palmos$$

La inclinación de las caras de una pirámide respondería a la pregunta ¿cuántos palmos tenemos que desplazarnos lateralmente para que se eleve la pirámide un codo de altura? (CALICE, 1902, pág. 147).

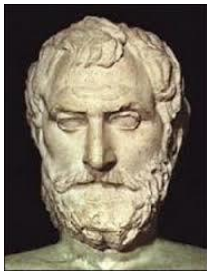
El vocablo *sqd* parece derivar de un verbo causativo 'hacer construir' que proviene del verbo *qd* 'construir' (FAULKNER, 1988, pág. 282), aunque anteriormente se relacionó con la palabra 'naturaleza', 'lo que hace la naturaleza (GRIFFITH F. L., 1894, pág. 238).

Aunque en estos problemas se vean envueltas razones trigonométricas, en ningún caso los egipcios las conocían ni las utilizaban como en la actualidad, simplemente resolvían ejercicios en los que se

necesitaba algún cálculo trigonométrico, pero desconocían las interrelaciones entre las seis razones trigonométricas y las fórmulas que las conectan.

El uso de las razones trigonométricas hay que asignárselo a los matemáticos hindúes quienes calcularon el seno como el cociente entre el lado opuesto de un triángulo rectángulo y su hipotenusa, y sobre todo a los árabes, quienes completaron las otras cinco razones y establecieron los principales teoremas que las relacionan.

El experimento realizado por Tales de Mileto para la medición de la altura de una pirámide pudo estar relacionado con el cálculo egipcio del seqed. El matemático griego, basándose en la semejanza de triángulos derivada de su teorema, según la cual dos triángulos son semejantes si sus ángulos son iguales y, en consecuencia, sus lados son proporcionales, colocó un bastón de medida conocida cercano a la pirámide de Khufu (Keops), midió la sombra proyectada por el objeto y la pirámide y estableció la relación entre ambas. Por la semejanza de triángulos es la misma relación que entre la longitud del bastón y la altura de la pirámide.



Tales de Mileto

Θαλῆς ὁ Μιλήσιος

Filósofo y matemático griego que vivió durante los siglos VII-VI a.C. (625-547 a.C.)

A pesar de no haber dejado ningún documento escrito se le atribuyen importantes aportaciones matemáticas, entre ellas, el célebre teorema que lleva su nombre relacionado con la razón de semejanza.

Problema 56 del PMR[4]

Calcular la inclinación de una pirámide cuya base tiene una longitud de 360 codos y su altura de 250 codos.

El procedimiento seguido por el matemático es sencillo. Calcula que la semibase es 180 (360 dividido entre 2) y la divide entre la altura.

1	**250**
1/2	125
1/5	50
1/50	5
1/2 1/5 1/50	**180**

El resultado, valor de la cotangente del ángulo diedro, es multiplicado por 7 palmos.

1	**7**
1/2	3 1/2
1/5	1 1/3 1/15
1/50	1/10 1/25
1/2 1/5 1/50	**5 1/25 palmos/codo**

El factor 1/5 se consigue dividiendo 7 entre 5.

$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

... teniendo en consideración la transformación de 2/5 en la tabla 2/n del PMR.

El factor 1/50 se consigue de forma similar dividiendo 7 entre 50.

1	**50**
1/5	10
1/10	5
1/25	2
1/10 1/25	**7**

... o lo que equivale a

$$\frac{7}{50} = \frac{(5+2)}{50} = \frac{5}{50} + \frac{2}{50} = \frac{1}{10} + \frac{1}{25}$$

Ahora explicaremos a suma de las fracciones 1/3 1/10 1/15 tomando como base m = 30, el doble del mayor "denominador".

1	**30**
1/3	10
1/10	3
1/15	2
1/3 1/10 1/15	**15**

La mitad de 30. Así tenemos

$$3 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{25} = 5 + \frac{1}{25}$$

El valor correspondiente a una inclinación de 5 1/25 palmos/codo es 54º 14' 46,01'', muy próximo a uno de los ángulos utilizados en la construcción de la pirámide acodada de Seneferu (Snofru).

Problema 57 del PMR

Si una pirámide de 140 codos de base tiene una inclinación de 5 "palmos" y 1 "dedo", ¿cuál es su altura?

Pensaríamos que el escriba aplicaría la fórmula

$$altura = \frac{mitad\ de\ la\ base\ piramidal\ (codos)}{inclinación\ (codos)} x7\ palmos$$

... pero el escriba multiplica el numerador y el denominador por 2 obteniendo

$$altura\ (codos) = \frac{la\ base\ piramidal\ (codos)}{doble\ de\ la\ inclinación(\frac{palmos}{codo})} x7\ palmos =$$

$$= base\left(\frac{1}{doble\ de\ la\ inclinación}\right) x7$$

Comienza calculando el doble de la inclinación, 5 palmos 1 dedo por dos, obteniendo 10 1/2 palmos, sabiendo que 1 palmo consta de 4 dedos (2 dedos se corresponde a 1/2 palmo). El siguiente paso es dividir 7 palmos entre el valor de la inclinación en palmos/codo, 10 1/2, lo que resulta

1	**10 1/2**
1/3	3 1/2
2/3	**7**

Valor por el que multiplica la base en codos para obtener la altura.

$$140\ x\ \frac{2}{3} = 93\frac{1}{3}\ codos$$

El valor del ángulo obtenido para dicha inclinación es de 53º 07' 48,37''.

Problema 58 del PMR

Calcular la inclinación de una pirámide cuya base tiene una longitud de 140 codos y su altura de 93 1/3 codos.

En realidad es la prueba del ejercicio anterior.

Se calcula la semibase, 140 codos de la base divididos entre 2, obteniéndose 70 codos. Ahora calcula la cotangente del ángulo diedro dividiendo este valor por la altura.

1	**93 1/3**
1/2	46 2/3
1/4	23 1/3
1/2 1/4	**70**

Ahora calcula la inclinación (palmos / codos) multiplicando la cotangente por 7 (1 codo son 7 palmos).

1	**7**
1/2	3 1/2
1/4	1 1/2 1/4
1/2 1/4	**5 1/4**

... que equivale a 5 palmos 1 dedo por codo, sabiendo que 1 palmo son 4 dedos.

Problema 59 del PMR

Calcular la inclinación de una pirámide cuya base tiene una longitud de 12 codos y su altura de 8 codos.

El método seguido es el mismo que en los problemas anteriores. Calcula el valor de la semibase, 6 codos (12 codos entre 2) y lo divide por el valor de la altura.

1	**8**
1/2	4
1/4	2
1/2 1/4	**6**

El resultado es el mismo que el obtenido en el problema anterior: 5 palmos 1 dedo por codo.

Problema 59B del PMR

Si una pirámide de 12 codos de base tiene una inclinación de 5 "palmos" y 1 "dedo", ¿cuál es su altura?

La metodología aplicada es la misma del problema 57. En primer lugar multiplica por 2 la inclinación (5 1/4 por 2), obteniendo 10 palmos y 2 dedos, o su equivalente 10 1/2 palmos. El siguiente paso es dividir 7 palmos entre el valor de la inclinación en palmos/codo, 10 1/2, lo que resulta 2/3, valor por el que multiplica el lado de la base para obtener la altura (2/3 por 12 igual a 8). La altura vale 8 codos.

Problema 60 del PMR

Calcular la inclinación de un pilar con forma de cono cuya base tiene un diámetro de 15 codos y su altura de 30 codos.

Un cono es un cuerpo geométrico que se origina por el giro de un triángulo rectángulo tomando como eje uno de sus catetos.

El vocablo egipcio utilizado es *jwn* 'pilar', pero el problema sugiere que se trata de un cono.

El ejercicio, que en principio es como los anteriores, presenta unan variante en su ejecución. Cuando revisamos las operaciones realizadas por el matemático egipcio observamos que no calcula el valor de la cotangente del ángulo diedro, sino la tangente, divide el valor del cateto opuesto entre el valor del cateto adyacente o contiguo.

1	**7 1/2**
2	15
4	**30**

Además el valor obtenido no es seguido de conversión alguna, por lo que el dato es el valor de la tangente, tal y como conocemos hoy.

Sin embargo, el problema pide el cálculo de la inclinación, el seqed. Para ello habría que invertir el valor de la tangente para calcular la cotangente del ángulo diedro, 1/4, y multiplicarlo por 7, obteniendo 1 1/2 1/4 palmos / codo, lo que implicaría un ángulo de 75° 57' 49,52''.

Una traducción al alemán de los ejercicios relacionados con las pirámides se pueden encontrar en Borchardt (1893, págs. 9-13).

Conociendo que un seqed son los palmos horizontales que se corresponden con una altura de un codo. Si dividimos 7 entre el número de seqed, obtendremos el valor de la tangente del ángulo diedro que conforma una de las caras triangulares de la pirámide con la base de la misma, y a partir de ella el ángulo correspondiente que reflejamos en la tabla siguiente.

seqeds	ángulo diedro
1	85° 43' 37,65''

2	74° 03' 16,58"
3	66° 48' 05,08"
4	60° 15' 18,43"
5	54° 27' 44,36"
6	49° 23' 55,34"
7	45° 00' 00,00"
8	41° 11' 09,33"
9	37° 52' 29,94"
10	34° 59' 31,27"

Como la mayoría de las pirámides construidas están entre 5 y 6 seqeds, ampliamos los datos con otra tabla.

seqeds	ángulo diedro
5,0	54° 27' 44,36"
5,1	53° 55' 26,36"
5,2	53° 23' 34,53"
5,3	52° 52' 08,67"
5,4	52° 21' 08,57"
5,5	51° 50' 33,99"
5,6	51° 20' 24,69"
5,7	50° 50' 40,44"
5,8	50° 21' 20,97"
5,9	49° 52' 26,03"
6,0	49° 23' 55,34"

Llama la atención el hecho de que los arquitectos egipcios utilizaron seqeds no enteros, lo que habría sido muy cómodo a la hora de realizar los planteamientos y de levantar la construcción. Parece probable que estuvieran embebidos en aspectos numéricos "sagrados" que les llevaría a adoptar inclinaciones próximas a los valores que estudiaremos en el capítulo dedicado a la Geometría egipcia referido a las pirámides armónicas. Pero si esto fuera así, ¿por qué no todas las pirámides tienen la misma inclinación? Las diferencias existentes no pueden ser debidas exclusivamente a errores en la construcción.

[1] En otro trabajo se dijo que el **seqed** era el valor de la cotangente del ángulo formado por la base de la pirámide y una de las caras, pero no es exactamente así.

[2] Algunos autores piensan que el término *wḫ3-ṯbt* no hace referencia a la longitud de uno de los lados de la base piramidal, sino a la diagonal de la misma (EISENLOHR, 1877).
[3] Para el mismo autor anterior se trataría de la arista que va desde uno de los ángulos de la base a la cima de la pirámide (EISENLOHR, 1877).
[4] Los problemas de pirámides están traducidos y comentados en (BORCHARDT L. , 1893, págs. 9-17)

Cálculo de volúmenes y superficies de cuerpos geométricos

Uno de los avances más importantes que encontramos en las matemáticas egipcias proviene del cálculo de **volúmenes**. En unos casos son muy exactos y en otros, los referidos a cuerpos esféricos, increíblemente aproximados.

Cálculo del volumen de un cilindro

Gran parte de los graneros construidos en el Egipto faraónico eran en parte cilíndricos con una cubierta semiesférica como nos muestran algunos grabados inscritos en tumbas nobiliarias.

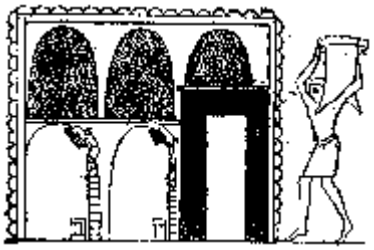


Ilustración 2. Dibujo de un granero cilíndrico (MASPERO, 1895, pág. 28).

Problema 41 del PMR

Calcular el volumen de un granero cilíndrico recto circular de 9 codos de diámetro y 10 codos de altura.

Un cilindro es un cuerpo geométrico formado por una superficie cerrada cortada por dos planos. Se llama **cilindro recto** cuando los planos son perpendiculares a las generatrices, y es **circular**, si sus dos bases son círculos.

En las matemáticas modernas, el volumen de un cilindro se calcula como el área de la base por la altura.

$$A = \pi r^2 h$$

El matemático egipcio seguirá la misma fórmula utilizando un valor para πr^2 de 3,16, como vimos en los problemas 58 y 60 del PMR.

Se halla 1/9 del diámetro (1/9 de 9), obteniéndose 1, valor que resta del diámetro completo, resultando 8 (9 menos 1), que elevado al cuadrado nos da el área, 64 codos cuadrados.

1	**8**
2	16
4	32
8	**64**

Multiplicando por la altura se obtienen 640 codos cúbicos (64 por 10). Realizando un cambio de unidades transforma los codos cúbicos en **khar** (1 codo cúbico son 1,5 **khar**) añadiendo la mitad del valor obtenido.

1	**64**
10	640
1/2 de (640)	320
	960 khar

Como el resultado es elevado lo transforma en **centenas** de cuádruple **heqat** dividiendo por 20, puesto que 100 **cuádruples heqats** son 20 **khar** (1 **khar** es 5 cuádruples **heqats**, medida en el Reino Nuevo).

$$\frac{960}{20} = 48\ centenas\ de\ cuádruples\ heqats$$

Veamos la conversión con más claridad.

$$960\ khar.\frac{20\ heqats}{1\ khar}.\frac{1\ cuádruple\ heqat}{4\ heqats} = 4800\ heqats$$

Problema 42 del PMR

Calcular el volumen de un granero cilíndrico recto circular de 10 codos de diámetro y 10 codos de altura.

Calculamos el área de la base, el círculo hallando los 8/9 del diámetro. Se divide 10 entre 9 obteniéndose 10/9 (1 1/9), valor que restamos del diámetro completo resultando 8 2/3 1/6 1/18.

Se llega a este resultado del siguiente modo. Primero resta 10 menos 1, alcanzando 9, valor del que resta 1/9 dividiendo 8/9.

1	**9**
2/3	6
1/3	3
1/6	1 1/2
1/18	1/2
2/3 1/6 1/18	**8**

Siguiendo el procedimiento para calcular el área del círculo de la base, eleva al cuadrado este resultado.

1	**8 2/3 1/6 1/18**
2	17 2/3 1/9
4	35 1/2 1/18
8	71 1/9
2/3	5 2/3 1/6 1/18 1/27
1/3	2 2/3 1/6 1/12 1/36 1/54
1/6	1 1/3 1/12 1/24 1/72 1/108
1/18	1/3 1/9 1/27 1/108 1/324
8 2/3 1/6 1/18	**79 1/108 1/324 codos cuadrados**

La suma de los enteros y de las fracciones con "denominador" 3 totaliza 78 1/3. Para el resto se toma como número base m = 108, el "denominador" mayor, cuyas 2/3 partes, lo que nos queda para completar 79, son 72.

1/9	**1/6**	**1/18**	**1/27**	**1/12**	**1/24**	**1/72**	**1/108**	**1/27**	**1/9**	
12	18	6	4	9	4 1/2	1 1/2	1	4	12	**72**

Nos quedan el 1/108 1/324 de la última fila.

Solamente queda multiplicar el valor del área de la base por la altura, 10 codos.

1	**79 1/108 1/324**
10	790 1/18 1/27 1/54 1/81

Veamos el resultado de multiplicar por 10 las dos fracciones. Dividimos 10 entre 108.

1	**108**
2/3	72
1/3	36
1/18	6
1/27	4
1/18 1/27	**10**

Dividimos 10 entre 324.

1	**324**
2/3	216
1/3	108
1/18	18
1/54	6
1/81	4
1/54 1/81	**10**

Convierte los **codos cúbicos** en **kher** como en el problema anterior, sumándole la mitad del valor obtenido.

1	**790 1/18 1/27 1/54 1/81**
1/2	395 1/36 1/54 1/108 1/162
1 1/2	1185 1/6 1/54

Para realizar la suma de las fracciones el escriba debió utilizar como número base el "denominador" mayor m = 162.

1/18	**1/27**	**1/54**	**1/81**	**1/36**	**1/54**	**1/108**	**1/162**	
9	6	3	2	4 1/2	3	1 1/2	1	**27**

La suma de las celdas marcadas es la sexta parte de 162, por lo que el volumen del granero es de 1.185 1/6 1/54 **khar**.

El siguiente paso es convertirlos en **centenas** de cuádruple **heqat** dividiendo por 20.

1	**1185 1/6 1/54**
1/10	118 1/2 1/54
1/20	**59 1/4 1/108**

Explicamos la división de las fracciones por 10.

1	**540**
1/540	1
1/60	9
1/60 1/540	10
1/54	10

Las dos últimas filas son equivalentes.

Problema 43 del PMR

El enunciado de este ejercicio propuesto por los diferentes autores varía. Peet (1923, pág. 82) y Chace (1927, pág. 87) sugieren que el diámetro del cilindro sería de 9 codos y la altura de 6 codos, pero los resultados al igual que las operaciones no encajarían en modo alguno con lo expuesto por el escriba. El enunciado seguido por Clagett propone el diámetro (altura) de 6 codos y una altura (diámetro)

de 9 codos (CLAGETT, 1999, pág. 158). Gillings sugiere que las dimensiones del diámetro son de 8 codos en vez de 9 codos, manteniendo la altura en 6 codos (GILLINGS, 1972, pág. 148).

Estudiemos el volumen de cilindro según las tres teorías expuestas siguiendo el procedimiento del matemático egipcio en los problemas anteriores calculando la capacidad del granero en **khar**.

$$V_c = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 h.\frac{3}{2}$$

1) Según Peet y Chace, aplicando nuestra fórmula anterior

$$V_c = \left(\frac{8}{9}9\right)^2 6.\frac{3}{2} = 576\ khar$$

... resulta 576 **khar**, valor que no se ajusta a los datos del papiro.

2) Según la primera propuesta de Clagett

$$V_c = \left(\frac{8}{9}6\right)^2 9.\frac{3}{2} = 384\ khar$$

... resulta 384 **khar**, valor muy inferior al expresado en el PMR.

La segunda propuesta de Clagett, que se muestra entre paréntesis, es la misma que la de Peet y Chace.

3) Según Gillings

$$V_c = \left(\frac{8}{9}8\right)^2 6.\frac{3}{2} = 455\ \frac{1}{9}\ khar$$

... el valor obtenido por el matemático egipcio.

Por lo tanto escribiremos el enunciado del problema como **calcular el volumen de un granero cilíndrico recto circular de 8 codos de diámetro y 6 codos de altura**.

El primer paso es calcular la novena parte del diámetro resultando 8 codos (9 menos 1). Ahora pensaríamos que se utilizaría el método del problema anterior para el cálculo en codos cúbicos, pero no, se cambia completamente, para dar el resultado directamente en **khar**. De nuevo un ejemplo de la versatilidad del escriba.

Sigue calculando la tercera parte del valor obtenido y se lo añade antes de elevarlo al cuadrado.

1	**8**
2/3	5 1/3

1/3	2 2/3
1 1/3	**10 2/3**

Lo eleva al cuadrado.

1	**10 2/3**
10	106 2/3
2/3	7 1/9
10 2/3	**113 2/3 1/9**

El valor 2/3 se obtiene primero dividiendo entre 3

$$\left(10+\frac{2}{3}\right):3=\frac{10}{3}+\frac{2}{9}=3+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$$

... conociendo el valor 2/9 de la tabla 2/n del PMR.

Ahora multiplica por 2.

$$\left(3+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right).2=6+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=7+\frac{1}{9}$$

Multiplica el valor obtenido por 4, las 2/3 partes de la altura del granero.

1	**113 2/3 1/9**
2	227 1/2 1/18
4	**455 1/9**

El último paso es la conversión a **centenas** de cuádruples **heqats**, dividiendo por 20, como hemos explicado en los problemas anteriores.

1	**455 1/9**
1/10	45 1/2 1/90
1/20	**22 1/2 1/4 1/180**[5]

¿Cómo llega el egipcio a esta metodología para el cálculo del volumen de un cilindro en **khar**? Si el escriba hubiera utilizado la fórmula general para el volumen de un cilindro habría aplicado

$$\left(\frac{8}{9}d\right)^2 h\frac{3}{2}=\frac{32}{27}d^2h$$

En el ejercicio se utiliza

$$\left(\frac{4}{3}d\right)^2 h\frac{2}{3}=\frac{32}{27}d^2h$$

... donde 4/3 es 1 1/3.

S. Couchoud comenta una posible explicación a este ejercicio según la que el matemático egipcio habría combinado los dos posibles procedimientos para calcular el volumen de un cilindro en **centenas de cuádruples heqats** que hemos expuesto con anterioridad, aplicando una fórmula errónea (COUCHOUD, 2004, pág. 77)

$$V_c = \left[d - \frac{d}{9} + \frac{1}{3}\left(d - \frac{d}{9}\right)^2\right] . \frac{2}{3} . \frac{1}{20} . h$$

... utilizando como valor para el diámetro 9 codos y para la altura 6 codos.

Problema 2 del PK

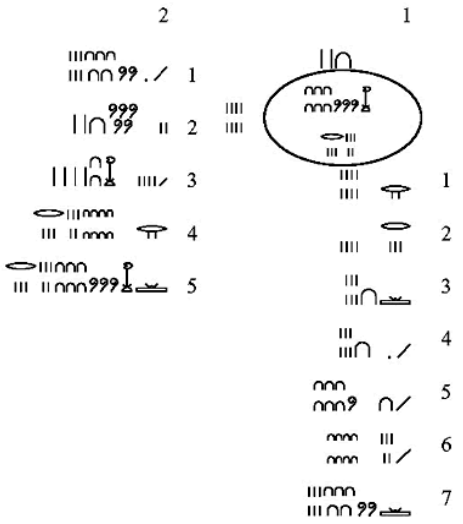
El manuscrito IV.3 no muestra enunciado alguno por lo que debemos deducirlo de los datos que se muestran más abajo. El ejercicio ocupa las columnas 13 y 14. En la columna de la derecha puede apreciarse el dibujo de una elipse que tiene en su interior el resultado final, encima el valor del diámetro y en el lateral izquierdo la longitud de la altura.

Seguimos la propuesta de Schak-Schakenburg (1899, págs. 78-79).

Calcular el volumen en khar de un cilindro cuyo diámetro es de 12 codos y su altura de 8 codos.

El procedimiento aplicado es el mismo que el utilizado en el problema anterior del PMR. Se calcula 1/3 del valor del diámetro que se añade al mismo totalizando 16 (1/3 de 12 es 4 que sumado a 12 da 16). Eleva al cuadrado este valor, resultando 256 (16 por 16). Obtiene los 2/3 de la altura resultando 5 1/3 (2/3 de 8 codos) que multiplica por 256 para terminar calculando el volumen del cilindro en **khar**: 1365 1/3.

1	**256**
2	512
4	1024
1/3[6]	85 1/3
5 1/3	**1365 1/3**



Si aplicamos la fórmula tradicional para el volumen de un cilindro

$$V_c = \pi r^2 h$$

... siguiendo el procedimiento egipcio para calcular el área circular de la base restaríamos al diámetro, 12 codos, su novena parte (12 - 12/9) lo que se convierte en 10 2/3. Valor que se eleva al cuadrado para obtener el área del círculo, obteniéndose 113 2/3 1/9 **codos cuadrados**. Para completar el volumen, multiplicamos por la altura, 8 codos, lo que se corresponde con 910 1/6 1/18**codos cúbicos**, que multiplicado por 11/2, la equivalencia en **khar**, una de las unidades de capacidad, resulta 1.365 1/3, el resultado aportado por el problema (SCHACK-SCHAAKENBURG, 1899, pág. 78).

Griffith propone un enunciado diferente cambiando los valores de la altura (12 codos) y del diámetro (8 codos) (GRIFFITH F. L., 1897, págs. 16, volumen 1). Con estos datos el resultado es muy diferente como podemos ver a continuación multiplicando el área de la base por la altura según el modelo egipcio.

$\frac{8}{9}$ de 8	$7+\frac{1}{9}$
$7+\frac{1}{9}$ al cuadrado	$50+\frac{1}{2}+\frac{1}{18}+\frac{1}{81}$
por la altura 12	$606+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$

Si multiplicamos este valor por 3/2 lo convertiremos en **khar** (1 codo cúbico son 1,5 **khar**), resultando 910 1/3 1/72, valor muy alejado del que aparece en el interior de la elipse.

Cálculo del volumen de cubo

Un cubo es un paralelepípedo (cuerpo geométrico que tiene sus caras paralelas dos a dos) que tiene todos sus ángulos diedros rectos y todas sus caras cuadrados iguales.

Problema 44 del PMR

Calcular el volumen de un granero cúbico de 10 codos de largo, 10 codos de ancho y 10 codos de largo.

En la actualidad el volumen del cubo se calcula

$$V_c = l^3$$

Después de la complejidad de los ejercicios anteriores éste es muy sencillo.

1		**10**
10		100
100	**1000**	**codos cúbicos**

Ahora convierte los **codos cúbicos** en **khar** añadiéndole la mitad de su valor.

1	**1000**
1/2	500
1 1/2	**1500 khar**

Dividiendo entre 20 se obtienen las **centenas** de cuádruple **heqat**.

1	**1500**
1/10	150
1/20	**75**

El egipcio realiza la comprobación del resultado. Deshace el cambio de unidades convirtiendo las **centenas** de cuádruple **heqat** en **khar** multiplicando por 20.

1	**75**
10	750
20	**1500 khar**

Ahora sigue un procedimiento peculiar. Divide entre 100 y luego calcula sus 2/3 la equivalencia entre **khar** y **codos cúbicos**.

1	**1500**
1/10	150
1/10 de 1/10	15
2/3 de 1/10 de 1/10	**10 codos**

Expliquemos más en profundidad este método. El volumen de un cubo en **khar** es

$$V_{c-k} = \frac{3}{2} l^3$$

Al dividir entre 100, divide entre el cuadrado del lado.

$$\frac{V_{c-k}}{100} = \frac{3}{2} \cdot \frac{l^3}{l^2} = \frac{3}{2} l$$

... por lo que el lado que se quiere calcular es

$$l = \frac{V_{c-k}}{100} \cdot \frac{2}{3}$$

Problema 45 del PMR

Si un granero cúbico tiene una capacidad de 7.500 cuádruples heqats de grano ¿cuál es su volumen?

Antes de comenzar el análisis del ejercicio es necesario hacer alguna reflexión sobre el vocablo *stwty* que hemos traducido como volumen y que en el Worterbüch se lee "Ergebnis" 'resultado' (Wb. IV, 335). Variantes de este vocablo aparecen en el problema 60 del PMR donde hemos traducido por el concepto matemático de tangente, el cociente entre el valor del cateto opuesto a un ángulo y el cateto adyacente. Además en el PMM la encontramos en tres ocasiones: en el problema 6 indica un área, una superficie rectangular, en el 14 se refiere, sin lugar a dudas, a la altura del tronco de pirámide, mientras que en el 18 vuelva a significar 'área, superficie'.

Esta variedad de significados nos podría hacer pensar que se tratara de diferentes vocablos, pero su escritura es muy semejante. En los problemas 14 y 18 del PMM se le ha añadido el determinativo genérico de un hombre con la mano en la boca (A2 de la lista de Gardiner) y sus significados son muy distintos. En el primero se refieren a la altura de un poliedro, el famoso tronco de pirámide, mien-

tras que en el segundo caso es refiere a un polígono, una figura plana, la superficie o el área de un rectñangulo

Volviendo al problema, es el inverso al anterior y relaciona las medidas de capacidad, **cuádruples heqats** y **khar**, con las de volumen, **codos cúbicos**.

Sigue el procedimiento de la prueba del ejercicio anterior. Primero transforma los **cuádruples heqats** en **centenas** dividiendo por 100 (7.500 entre 100 da 75 centenas). Luego los convierte en **khar** multiplicando por 20.

1	**75**
10	750
20	**1500**

Ahora divide entre 100 y multiplica por 2/3.

1	**1500**
1/10	150
1/10 de 1/10	15
2/3 de 1/10 de 1/10	**10 codos**

Este método implica conocer la longitud del lado previamente, tomando como valor 10 codos. Conociendo las dimensiones de los lados de la base, un cuadrado en este caso, no se calcula la tercera dimensión del granero sino la altura que alcanzan los 7.500 **cuádruples heqats** de grano.

Se han conservado pequeñas maquetas de graneros ortoédricos en los que podemos apreciar las aberturas superiores por las que se introducía el grano ascendiendo por una escalera.

Ilustración 3. Modelo de granero en madera pintada fechado en el Reino Medio (museo del Louvre, París, E283).

Ilustración 4. Maqueta de un granero rectangular de cerámica, fechada en la XII dinastía y custodiada en el museo de Norfolk (1921.37.1:A).

Ilustración 5. Modelo de granero rectangular procedente de la tumba de Meketra en el occidente tebano, fechado en la XII dinastía, durante el reinado de Amenemhat I. Se custodia en el Metropolitan Museum de Nueva York - 20.3.11).

Ilustración 6. Modelo de granero rectangular de 27,5 x 42 x 44 cm. procedente de Assuán, fechado en la VI dinastía, custodiado en el museo Británico de Londres (EA 21804).

Ilustración 7. Modelo de granero rectangular de madera de 18 cm. de altura, procedente de Tebas, fechado en el Reino Medio, custodiado en el museo Británico de Londres (EA 2463).

Cálculo del volumen de un ortoedro

Un ortoedro es un paralelepípedo, poliedro en el que todas las caras opuestas son paralelas, que tiene todos sus ángulos diedros rectos.

Problema 46 del PMR

Si un granero rectangular tiene una capacidad de 2500 cuádruples heqats de grano, ¿Cuáles son sus dimensiones si la longitud y la anchura son de 10 codos?

Al tener la base cuadrada de 10 codos de lado se puede utilizar la metodología anterior.

Se transforman los **cuádruples heqats** en sus centenas dividiendo por 100 (2.500 entre 100 resulta 25 centenas), que se convierten en **khar** multiplicando el valor obtenido por 20.

1	**25**
10	250
20	**500 khar**

Divide entre 100 y multiplica por 2/3.

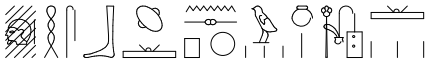
1	**500**

1/10	50
1/10 de 1/10	5
2/3 de 1/10 de 1/10	**3 1/3 codos**

Problema 5 del PK según Gillings

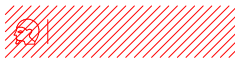
El problema de la placa LV.4 del PK, a sugerencia de Gillings (1972, págs. 163-164) calcula el volumen de un ortoedro y se podría enunciar como **en un granero de base rectangular cuya anchura es 1/2 1/4 de su longitud se vierten 40 cestas de 90 hin de capacidad hasta alcanzar la altura de 1 codo ¿Cuáles son las medidas de sus lados?**

Estudiaremos la restauración propuesta por el autor línea a línea, aun teniendo en cuanta que podría haber propuestas más sencillas.



tp ḥsb n spw nw sẖw

Ejemplo de recuento de las acciones de un libro[7].

(31) 

tp [...]

Ejemplo de [un granero rectangular cuya anchura es 1/2 1/4 de su longitud. Cuarenta cestas de 90 hin]

(32)

[...]

[se vierten en ella hasta una profundidad de 1 codo. Encontrar el lado]

(33)

[...] *n pꜣ hnw*

[Divide 90 hin entre 30 y se convierte en 3].

(34)

jr.ḫr.k pꜣ 40 sp(w) 3

Multiplicas 40 por 3

(35)

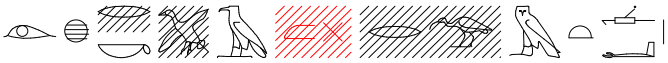
ḫprt jm pw 120 jr.ḫr.k

... lo que se convierte en 120. Luego haces

(36)

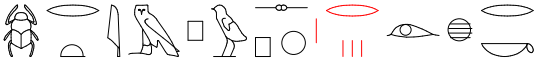
1/10 n 120 ḫprt jm pw 12

... 1/10 de 120, lo que se convierte en 12.

(37) 

jr.ḫr.k pꜣ 1/2 1/4 r gmt wꜥ

Divide entre 1/2 1/4, uno

(38) 

ḫprt jm pw sp(w) 1 1/3 jr.ḫr.k

... lo que se convierte en 1 1/3.

(39)

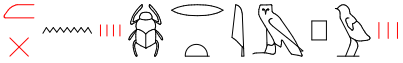
pꜣ 12 sp(w) 1 1/3 ḫprt jm pw 16

Multiplica 12 por 1/3, lo que se convierte en 16.

(40)

jr.ḫr.k ḳnbt m 4 jr.ḫr.k

Haces (su) raíz cuadrada en 4. Haces

(41) 

1/2 1/4 n 4 ḫprt jm pw 3

1/2 1/4 de 4, lo que se convierte en 3.

(42)

ḫprt jm pw ḥꜣywt 10 nt mḥ 4 r 3

Es lo que se convierte en 10 **hayt** de 4 codos: 3 codos.

Antes de explicar el razonamiento de Gillings veremos cómo resolveríamos el ejercicio en la actualidad.

El volumen de un ortoedro es el producto del área de la base (largo por ancho) por la altura.

$$V_l = l\ x\ a\ x\ h$$

Primero calcularíamos el volumen del granero multiplicando el número cestas vertidas por la capacidad de cada una de ellas: 40 cestas por 90 **hin** cada una nos da una capacidad de 3600 **hin**, que transformado en **heqats** son 360 **heqats**, puesto que 1 **heqat** son 10 **hin**. El siguiente paso es convertir las unidades de capacidad, **heqat**, en unidades de volumen, **codos cúbicos**, dividiendo por 30 (1 **codo cúbico** son 30 **heqats**), resultando 12 **codos cúbicos**.

Una vez obtenido el volumen del granero aplicaremos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, conociendo que la altura alcanzada es de 1 codo.

$$\begin{cases} 12 = l\ x\ a \\ a = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) l \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de "a" en la primera ecuación resulta

$$12 = l^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$l^2 = \frac{12}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = 16$$

$$l = \sqrt{16} = 4\ codos\ de\ largo$$

El ancho se calcula sustituyendo el valor obtenido en la segunda ecuación del sistema

$$a = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) 4 = 3\ codos\ de\ anchura$$

El razonamiento de Gillings es semejante. Para calcular el volumen a partir de la capacidad de las cestas

$$V = \frac{90\ x\ 40}{30\ x\ 10}$$

... el matemático lo realiza en varios pasos. Comienza dividiendo 90 **hin** entre 30, obteniendo 3 (línea 33), valor por el que multiplica 40

cestas, resultando 120 (línea 34). Completa la transformación en **codos cúbicos** dividiendo 120 entre 10 (línea 36), que da 12 **codos cúbicos**.

Ahora continúa como si aplicara el sistema de ecuaciones propuesto más arriba. En la línea 37 se calcula el inverso de 1/2 1/4 como 1 1/3 (línea 38), valor que multiplica por 12, convirtiéndose en 16 (línea 39). Basta con realizar la raíz cuadrada de 16 codos cuadrados (línea 40) para obtener la longitud del largo: 4 codos. En la línea 41 se calcula la longitud del ancho.

Clagett (1999, pág. 245) se limita a copiar el texto de Griffith sin dar una explicación al problema.

Otros autores dan versiones distintas. Por ejemplo en la página http://www.digitalegypt.ucl.ac.uk/lahun/uc32162.html el problema se enuncia como **un área de 40 codos por 3 codos se dividirá en 10 porciones cada una cuya anchura es ½ ¼ de su longitud. ¿Cuáles son las medidas de los lados de los pedazos?**

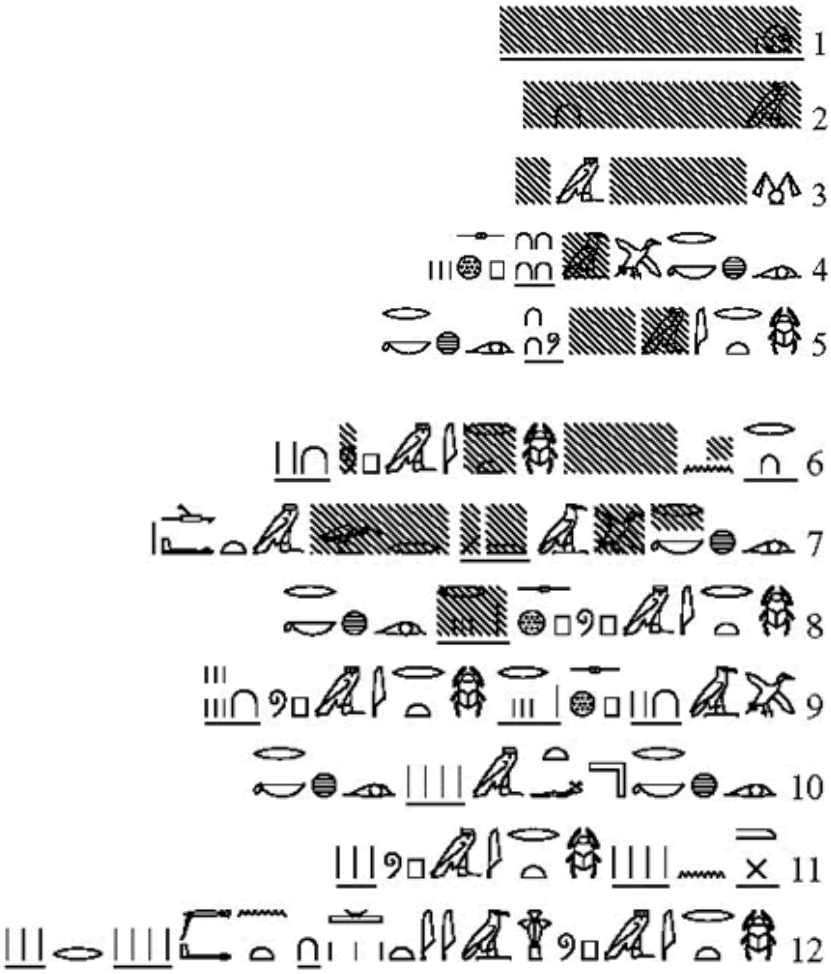
En primer lugar, siempre siguiendo este enunciado, el escriba calcula el área del rectángulo a dividir multiplicando 40 codos por 3 codos, resultando 120 codos cuadrados (líneas 34 y 35). Posteriormente calcula el área de cada una de las diez piezas dividiendo 120 codos cuadrados entre 10, resultando 12 codos cuadrados por pedazo (línea 36).

Ahora aplica la proporción en la que el largo de cada pedazo es 1/2 1/4 de su ancho. Calcula el inverso de 1/2 1/4 convirtiéndose en 1 1/3 (líneas 37 y 38), que multiplica por 12 codos cuadrados obteniendo 16 codos cuadrados (línea 39). Basta con calcular la raíz cuadrada para saber que el largo de cada uno de los 10 pedazos es de 4 codos (línea 40). Luego, como en los casos anteriores calcularía el valor del ancho de los pedazos multiplicando el valor obtenido por 1/2 1/4, resultando 3 codos de ancho (línea 41).

Es importante reseñar que este enunciado explica la línea 42, en la que aparecen las 10 tiras que hay que cortar diciendo que **el resultado del área de las 10 tiras es de 4 por 3 codos**.

Además este planteamiento evita incluir cambios de unidades en el problema.

Este ejercicio es similar a los problemas 6, 7 y 17 del PMM.



Cálculo de la superficie de una semiesfera

El volumen de una semiesfera fue calculado por Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.) a partir del volumen del mismo cuerpo que desarrolló por un hábil procedimiento geométrico.

Dibujo una semiesfera, un cono con ángulo de apertura de 45º y un cilindro cuyas bases eran de la misma superficie que el círculo máximo de la semiesfera. Seccionó los tres cuerpos por un plano a la misma altura

... y estudió el área de las secciones (color gris). El área de la superficie del cilindro es πR^2, siendo R el radio de la semiesfera, que pode-

mos descomponer siguiendo el teorema de Pitágoras en $\pi(r^2 + h^2)$; el área del círculo de la semiesfera dependerá de la altura a la que se haya realizado el corte

...siendo su valor πr^2, siendo r el radio de la sección; el área del cono es, al tratarse de un ángulo de 45º, πh^2, siendo h la distancia a la que se realizó el corte.

De este modo se deduce que el área de la sección en el cilindro, $\pi(r^2 + h^2)$, es la suma de las secciones de la semiesfera, πr^2, y del cono, πh^2. Al ocurrir esto en todas las secciones, los volúmenes siguen la misma relación.

$$V.del\ cilindro = V.de\ la\ semiesfera + V.del\ cono$$

A este resultado se podría haber llegado de forma empírica a través de recipientes semiesférico, cónico y cilíndrico rellenos de agua. El agua de los dos primeros llenaría el cilíndrico.

Tomando como conocidos el volumen del cilindro, $\pi R^2 h$, y el del cono, $\pi R^2 h/3$, es fácil deducir que el volumen de la semiesfera es $2\pi R^2 h/3$. Tomando la altura como el radio se determina $2\pi R^3/3$. Ampliando los resultados a una esfera completa se obtiene $4\pi R^3/3$.

Veamos como deducir el área de la superficie esférica conociendo el volumen. Una esfera se puede descomponer en "n" pirámides con el vértice en el centro de la esfera cuyo volumen sería $Rb^2/3$, siendo "b" el área de la base piramidal. El volumen sería la suma de los "n" volúmenes piramidales.

$$V_e = nV_p$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = n\left(\frac{1}{3}Rb^2\right)$$

Como nb^2 es la suma de todas las bases piramidales, es también la superficie de la esfera (S_e), por lo que

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = S_e \cdot \frac{1}{3}R$$

... de donde se deduce que

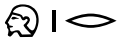
$$S_e = 4\,\pi R^2$$

... y la de la semiesfera

$$S_{se} = 2\,\pi R^2$$

Problema 10 del PMM

Calcula la superficie de una cesta semiesférica con un diámetro en la boca de 4 1/2 codos.

Algunos autores piensan que no se trata de una semiesfera sino un semicilindro que tiene como diámetro el mismo valor que la longitud de la altura del cilindro. Una de las dificultades que presenta el texto para discernir entre ambas posibilidades es la traducción de algunos vocablos. En la línea 2 de la columna XVIII leemos  *tp-r*, palabra utilizada para describir la base de un triángulo en los problemas 51 del PMR y 4 del PMM, significado que, evidentemente, no puede tener en este ejercicio. Parece evidente que se trata de 'apertura', la 'boca' de la semiesfera. Es razonable pensar que *tp-r m ꜥḏw* 'la apertura en el límite' tenga el valor geométrico del diámetro del cuenco, la semiesfera, en cuestión.

El área de una semiesfera[9] es

$$A = 2\pi r^2 = 2\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi\frac{d^2}{2}$$

...mientras que la del semicilindro es

$$A = \frac{2\pi rh}{2} = \pi rh = \frac{\pi dh}{2}$$

Como puede verse ambas fórmulas son equivalentes si la altura del cilindro coincide con el diámetro. El problema para considerar un semicilindro vendría del propio texto egipcio donde no aparece más que un dato matemático, 4 1/2, a no ser que se considerara una traducción como 'un semicilindro de diámetro (*tp-r*) 4 1/2 y en altura (*ꜣḏw*) 4 1/2.

Otra propuesta (PEET T. E., 1931, pág. 154), menos seguida por los estudiosos del tema, es que se tratara de calcular el área de un **semicírculo**.

$$A = \pi \frac{r^2}{2}$$

En este caso el valor dado en el problema, 4 1/2, se referiría al radio (*tp-r m ꜣḏw*). Tener en consideración esta propuesta muestra un grave inconveniente. En ninguno de los problemas que aparecen en el PMR en los que están envueltos cálculos de círculos (PMR 41, 42, 43, 48 y 50), ni en los referentes al mismo problema en el papiro demótico de El Cairo, se hace referencia a la noción de radio (COUCHOUD, 2004, pág. 95) , pero en el Worterbüch aparece como segundo significado (Wb. 287).

Como estudiamos al resolver el problema del área del círculo el procedimiento aplicado por el matemático difería mucho del actual y era dependiente de $\left({}^{8d}/_{9}\right)^2$. Intentemos desgranar el procedimiento del problema de la superficie de la semiesfera y comprobaremos como $\left({}^{8d}/_{9}\right)^2$ sigue siendo un elemento importante en el cálculo.

Sigamos los datos aportados por el escriba egipcio en el PMM en paralelo con una notación algebraica más moderna que nos permitirá, al final del ejercicio, llegar a la fórmula expuesta.

1) Primero duplica el valor del diámetro (4 1/2 x 2 = 9 codos) que en nuestra notación sería **2d**.

2) Calcula la novena parte del valor obtenido (1/9 de 9 = 1) que escribimos como **2d/9**, y lo resta del valor **2d** (9 – 1 = 8), equivalente a **2d -2d/9 = (2d).8/9**. El primer 8/9.

3) Sigue con la novena parte del dato anterior (1/9 de 8 es 2/3 1/6 1/18) que expresaríamos como **(2d).8/9²**.

1	**9**
2/3	6
1/3	3

1/6	1 1/2
1/9	1
1/18	1/2
2/3 1/6 1/18	**8**

... que resta del total previo.

$$8-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}\right)=7+\frac{1}{9}$$

Lo obtiene viendo que el valor que le falta al paréntesis para completar hasta la unidad es 1/9 (celdas de color verde).

En nuestra notación paralela

$$\frac{2d.8}{9}-\frac{2d.8}{9^2}=\frac{2d.8}{9}\left(1-\frac{8}{9}\right)=2d\left(\frac{8}{9}\right)^2$$

4) Ya tenemos el cuadrado que conocíamos del cálculo del área del círculo, pero el diámetro no está al cuadrado. Por ello el escriba multiplica el valor obtenido por él.

$$\left(7+\frac{1}{9}\right)\left(4+\frac{1}{2}\right)=32$$

... obteniendo el valor de la superficie de la semiesfera o del semicilindro si el último valor por el que multiplica es la altura.

1	**7 1/9**
2	14 1/6 1/18 [2/9]
4	28 1/3 1/9
1/2	3 1/2 1/18
4 1/2	**32**

Para llegar al valor de la suma basta con demostrar que

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1}{2}$$

... cosa que el escriba realiza con facilidad.

La superficie de la semiesfera es de 32 **codos cuadrados**.

Volviendo a nuestra notación que habíamos dejado antes de multiplicar por el diámetro, tenemos

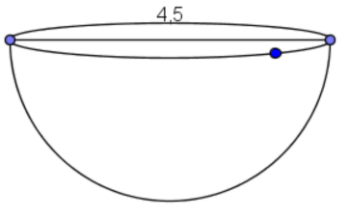
$$2d\left(\frac{8}{9}\right)^2.d=2\left(\frac{8d}{9}\right)^2$$

... justamente el doble del área del círculo que es la fórmula para calcular el área de una semiesfera.

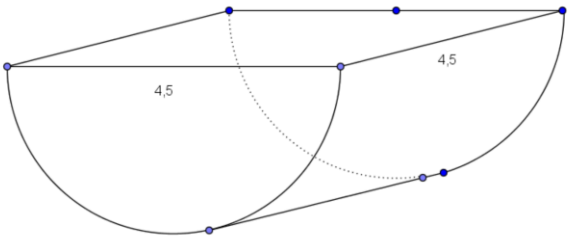
Como **d = 2r**, al sustituir en la expresión anterior obtenemos

$$2\left(\frac{16r}{9}\right)^2$$

Si recordamos que el valor de π al que llegaron los egipcios era $(16/9)^2$, solamente tenemos que sustituir en la fórmula anterior para llegar a nuestra fórmula actual $2\pi r^2$.



La principal discusión estriba en el término *nbt*, que hemos traducido como "cesta". Mientras que unos autores prefieren considerarla como una semiesfera, una especie de cuenco, otros apoyan la tesis de un semicilindro. El texto jeroglífico ayuda poco. El único detalle que quizá esté relacionado con la forma del objeto es *jnr* que nos indicaría una piedra esférica, pero poco más[10]. Como se utiliza 4 1/2 codos tanto para el valor del diámetro como para la altura del supuesto semicilindro, no hay manera de poderlos diferenciar en principio.



Cálculo del volumen de un tronco de pirámide

Un tronco de pirámide es una pirámide seccionada por un plano paralelo a la base cuyo cálculo no es sencillo.

Durante el Reino Antiguo esta imagen fue muy frecuente en la construcción de los monumentos funerarios llamados mastabas, voz procedente del árabe que significa 'banco' y el cálculo de su volumen

sería muy útil para conocer la cantidad de material de construcción necesario para su edificación. La evolución de este monumento dio lugar en un primer paso a una pirámide escalonada, siendo la más famosa la construida por el arquitecto Imhotep como tumba del rey Djeser de la III dinastía, y se concluye con las grandes pirámides, tumbas de algunos de los más insignes faraones egipcios.

Parece lógico pensar, aunque no tengamos documentación al respecto, que al igual que los matemáticos del país del Nilo sabían calcular el volumen de una pirámide truncada, conocerían el procedimiento para el cálculo del volumen de la pirámide completa, mucho más sencillo, la tercera parte del área de su base por su altura.

El avance de los egipcios se hace evidente en esta ocasión sobre todo si lo comparamos con sus vecinos, los pueblos babilónicos (COUCHOUD, 2004, pág. 88), que solamente fueron capaces de conseguir una aproximación calculando el volumen de un tronco de pirámide como la media aritmética de las áreas de las bases multiplicada por la altura

$$V = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)h$$

... en vez del procedimiento general que estudiaremos con detalle a continuación

$$V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h$$

Otros autores dan un método más correcto para los matemáticos babilónicos,

$$V = \left[\left(\frac{B+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{B-b}{2}\right)^2\right]$$

... recordemos la forma de un zigurat, una superposición de pirámides truncadas dando un aspecto semejante a una pirámide escalonada

La obtención de la fórmula para el cálculo del volumen de un tronco de pirámide se puede ver en el anexo 8.

Problema 14 del PMM

Calcula el volumen de un tronco de pirámide de 6 codos de altura y 4 codos de lado de la base.

Primero deduciremos la fórmula moderna para el cálculo del volumen de un tronco de pirámide partiendo del volumen de una pirámide.

Sabemos que el volumen de la pirámide completa es

$$V_P = \frac{1}{3} B^2 h_P$$

...siendo B la longitud de la base piramidal (la base mayor del tronco de pirámide), y h_P, la altura de la pirámide completa.

El volumen del tronco de pirámide puede calcularse restando del volumen de la pirámide completa el de la pirámide de la cúspide que queda al quitar el tronco de pirámide. Su volumen es

$$V_P = \frac{1}{3} b^2 h_c$$

... siendo b la longitud de la base menor del tronco de pirámide y h_c, la altura de la pirámide de la cúspide.

$$V_t = V_P - V_c = \frac{1}{3} B^2 h_P - \frac{1}{3} b^2 h_c = \frac{1}{3}(B^2 h_P - b^2 h_c)$$

Sabemos que la altura del tronco de pirámide (h_t) es la resta entre la altura de la pirámide completa y la de la pirámide de la cúspide.

$$h_t = h_P - h_c$$

$$h_c = h_P - h_t$$

$$V_t = \frac{1}{3}[B^2 h_P - b^2(h_P - h_t)]$$

$$V_t = \frac{1}{3}(B^2 h_P - b^2 h_P + b^2 h_t)$$

Se puede demostrar por semejanza de triángulos basada en el teorema de Thales (un sistema de rectas convergentes o secantes cortadas por rectas paralelas determinan segmentos proporcionales). Así

$$\frac{b}{B} = \frac{h_c}{h_p} = \frac{h_P - h_t}{h_p}$$

... de donde

$$bh_p = B(h_P - h_t)$$

$$bh_p = Bh_P - Bh_t$$

$$Bh_t = h_P(B - b)$$

$$h_P = \frac{Bh_t}{B - b}$$

... sustituyendo en la fórmula del volumen

$$V_t = \frac{1}{3}\left[B^2\left(\frac{Bh_t}{B-b}\right) - b^2\left(\frac{Bh_t}{B-b}\right) + b^2 h_t\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{Bh_t}{B-b}\right)(B^2 - b^2) + b^2 h_t\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{Bh_t}{B-b}\right)(B+b)(B-b) + b^2 h_t\right] =$$

$$= \frac{1}{3}[Bh_t(B+b) + b^2 h_t] =$$

$$= \frac{1}{3}[B^2 h_t + Bbh_t + b^2 h_t] = \frac{h_t}{3}(B^2 + Bb + b^2)$$

El primero en calcular este volumen fue, al parecer, Demócrito (Δημόκριτος 460-370 a.C.), pero sin duda hay que asignar al geómetra griego Euclides (Ευκλείδης 325-265 a.C.) el desarrollo de una demostración rigurosa en su obra Elementos (XII, 7), en la que un prisma de base triangular es dividido a lo largo de sus diagonales en tres pirámides, concluyéndose que el volumen de una pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma.

El matemático Herón de Alejandría (Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεύς siglo I-II d.C.) en su obra Métrica (II, 8) aborda el volumen de un tronco de pirámide cuyas bases son 10 y 2 y la altura 7 aplicando la fórmula

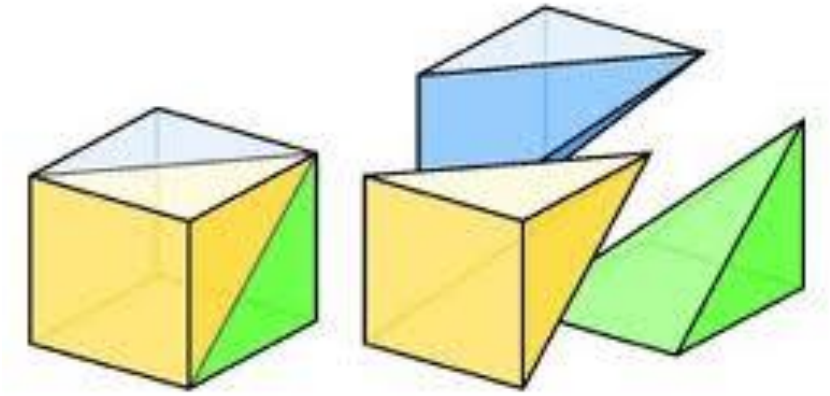
$$V = \left[\left(\frac{B+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{B-b}{2}\right)^2\right]$$

... pero se atribuye al gran matemático Leonardo Pisano (1170-1250 d.C.), Fibonacci, la aplicación por primera vez de la fórmula moderna en su obra Practica geometriae (CHACE, 1927, pág. 170).

El matemático egipcio en el PMM aplica el mismo procedimiento que el actual. Primero eleva al cuadrado la base mayor obteniendo 16 codos cuadrados (4 por 4); luego multiplica 4 por 2 (el producto de las dos bases) obteniendo 8 codos cuadrados; le falta calcular el cuadrado de la base menor, resultando 4 codos cuadrados (2 por 2).

Suma los tres valores obtenidos (el paréntesis de nuestra fórmula) resultando 28 codos cuadrados. Calcula la tercera parte de la altura, 2 codos (6 entre 3). Por último multiplica el valor del paréntesis 28 codos cuadrados, por el tercio de la altura, 2 codos, obteniendo el volumen del tronco de pirámide, 56 codos cúbicos.

Veamos cómo pudo el matemático egipcio llegar a esta fórmula. Sin duda el escriba conoce que el volumen de una pirámide es la tercera parte del cubo que la contiene, dato al que pudo llegar de forma empírica, observando que la capacidad de una pirámide es la tercera parte de la del un cubo que tiene como arista la altura de la misma, o pesando los dos cuerpos geométricos.



Construimos una pirámide que tenga como altura la mitad de la longitud de su base y la seccionamos por dos planos perpendiculares entre sí, paralelos a las caras y que pasan por el vértice (GILLINGS, 1972, pág. 190).

La pirámide queda dividida en cuatro pirámides oblicuas con un ángulo diedro formado con la altura de la pirámide. La altura de estas pirámides oblicuas esa pirámide completa, pero el lado de la base es la mitad del lado de la base original.

Sabemos que tres pirámides construyen un cubo de arista (a) la altura de la pirámide completa (h) o la mitad de su base (b).

$$a = h = \frac{b}{2}$$

Con esos datos

$$V_{cubo} = \frac{3}{4} V_{pirámide}$$

$$a^3 = \frac{3}{4} V_{pirámide}$$

$$h.a^2 = \frac{3}{4} V_{pirámide}$$

$$h.\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}V_{pirámide}$$

$$h.\frac{b^2}{4} = \frac{3}{4}V_{pirámide}$$

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3}hb^2$$

... el volumen de la pirámide de base cuadrada.

Para llegar a la fórmula del tronco de pirámide partiría de la suma de tres volúmenes.

1) El ortoedro central que tiene como base la base menor del tronco de pirámide (b) y como volumen el área de la base por la altura del tronco.

$$V_o = b^2 h_t$$

2) Cuatro cuñas a ambos lados de la base menor del prisma cuyo volumen es la mitad del ortoedro formado por la base menor (b), la altura (h_t) y la resta de ambas bases partido por 2 ($\frac{B-b}{2}$).

$$V_{cuña} = \frac{b(B-b)h_t}{4}$$

Entre las 4 cuñas totalizan un volumen

$$V_{4cuñas} = b(B-b)h_t = (Bb - b^2)h_t$$

3) Cuatro pirámides de las esquinas que tienen como base $\frac{B-b}{2}$ y altura la del tronco de pirámide. Su volumen será 1/3 del área de la base (un cuadrado) por la altura.

$$V_{esquina} = \frac{1}{3}\left(\frac{B-b}{2}\right)^2 h_t$$

Entre las cuatro pirámides de las esquinas

$$V_{4esquinas} = \frac{1}{3}(B-b)^2 h_t$$

Sumando los volúmenes correspondientes a los tres anteriores

$$V_t = b^2 h_t + (Bb - b^2)h_t + \frac{1}{3}(B-b)^2 h_t$$

... y operando obtenemos la fórmula aplicada por nosotros y por el matemático egipcio.

Gillings propone que se llegaría por procedimiento geométrico iterativo considerando los datos ofrecidos por el problema 14 del PMM (GILLINGS, 1972, págs. 191-193). Propone que B (base mayor) = 2b (base menor), puesto que la base mayor es 4 y la menor 2 en el problema. Por otro lado, aplicando el teorema de Tales sabe que la altura del tronco de pirámide es la mitad de la altura de la misma.

$$\frac{base\ del\ triángulo\ pequeño}{base\ del\ triángulo\ grande} = \frac{altura\ del\ triángulo\ pequeño}{altura\ del\ triángulo\ grande}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{h_c}{h_c + 6}$$

$$h_c = 6$$

La altura de la pirámide sin truncar es de 12 codos (6 más 6) suma de la altura del tronco y de la pirámide de la cúspide ($h_p = h_t + h_c$).

$$h_t = h_c$$

Conocemos que para calcular el volumen del tronco de pirámide restaremos los volúmenes de la pirámide completa menos el de la pirámide de la cúspide.

$$V_t = V_P - V_c = \frac{1}{3}B^2h_P - \frac{1}{3}b^2h_c = \frac{1}{3}[B^2(h_t + h_c) - b^2h_c] =$$

$$= \frac{1}{3}(B^2h_t + B^2h_c - b^2h_c)$$

Como la altura del tronco y la de la pirámide la cúspide son iguales podemos poner

$$\frac{1}{3}h_t[B^2 + (B^2 - b^2)]$$

Geométricamente se demuestra que $B^2 - b^2$ es $Bb + b^2$.

Sustituyendo se obtiene la fórmula

$$\frac{h_t}{3}(B^2 + Bb + b^2)$$

Aplica el mismo sistema para un tronco de pirámide cuya base menor es la tercera parte de la mayor y la altura del tronco de pirámide 2 veces la de la pirámide la cúspide, obteniendo el mismo resultado, concluyendo que el método sería válido para todos los casos.

Otros autores han expuesto sus teorías sobre cómo los egipcios podrían haber deducido el volumen del tronco de pirámide conociendo previamente el volumen de una pirámide de base cuadrangular completa.

Estudiemos la propuesta gráfica de van der Waerden (1954, págs. 35-36). Comienza construyendo un tronco de pirámide con un ángulo diedro rectángulo.

Ahora transforma las dos cuñas y la pirámide en paralelepípedos de volumen equivalente. La dos cuñas de color rosa se transforman en dos ortoedros de bases b y a − b, y la mitad de la altura del tronco de cono inicial

... y la pirámide verde en un ortoedro de base cuadrada a − b y de una altura la tercera parte de la del tronco de cono, como reza la fórmula del volumen de una pirámide,

... conformando la figura siguiente.

Ahora aplica un ajuste entre los dos paralelepípedos iguales. Quita 1/6 de la altura a uno de ellos (1/2 − 1/6 = 1/3), y se la añade al otro (1/2 + 1/6 = 2/3).

Sumamos los volúmenes correspondientes a los tres paralelepípedos

$$[b^2h] + \left[b(a-b)\frac{2h}{3}\right] + \left[a(a-b)\frac{h}{3}\right]$$

$$\frac{3b^2h}{3} + \frac{ab^2h}{3} - \frac{2b^2h}{3} + \frac{a^2h}{3} - \frac{a^2h}{3} = \frac{h}{3}(3b^2 + 2ab - 2b^2 + a^2 - ab)$$

$$\frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

Para finalizar expondremos el procedimiento de Vetter (1930, págs. 16-18) que presupone conocido el volumen de una pirámide y dos aspectos más: la presencia de un ángulo diedro recto y que la superficie superior es la mitad de la inferior, como en el problema 14 del PMM. Este autor secciona el tronco de pirámide en cuatro pirámides, dos de ellas cuadrangulares, cuyas bases son la base mayor

...y la base menor,

...y otras dos iguales (ABCD y CDEF) de base un triángulo cuya altura es la del tronco de pirámide y la longitud la base mayor (AD - DE), y cuya altura es el lado de la base menor (BC - CF)

... considerando que BC (longitud de la base menor) es perpendicular a la base ABD por existir un ángulo diedro en el vértice D.

Sumando los cuatro volúmenes

$$\frac{h}{3}a^2 + \frac{h}{3}b^2 + 2\frac{b}{3}.\frac{ah}{2}$$

... se llega a la fórmula del volumen del tronco de pirámide.

Un problema semejante fue resuelto por Abu Abdallah Muḥammad ibn Mūsā al-Jwārizmī (الخوارزمي موسى بن محمد الله عبد أبو جعفر أبو; 780 – 850 d.C. aproximadamente), conocido como al-Juarismi, un matemático y astrónomo persa, a quien debemos el vocablo 'álgebra'. Las medidas de las bases del troco de pirámide coinciden con las del PMM, pero la altura es de 10. El modo de resolución es restando el volumen de la pirámide completa que constituiría el tronco de pirámide de la de la pirámide que conformaría el vértice (ROSEN, 1831, págs. 83-84).

Cálculo del volumen de un tronco de cono. Papiro de Oxyrhynchus

Llama la atención que no se haya conservado ningún ejercicio relacionado con el **volumen del tronco de cono** ni en el PMR ni en el PMM, pues la clepsidra o reloj de agua, en egipcio *dbḥ* ( ) (CLAGETT M. , 1995, pág. 458) fue un instrumento muy frecuente en el antiguo Egipto para la medición de las horas.

Ilustración 8.Dibujo de la clepsidra de Karnak de Amenhotep III (XVIII dinastía) custodiada en el museo de El Cairo (JE 37525) (fuente http://www.conec.es/2013/05/midiendo-el-tiempo-gota-a-gota-las-clepsidras/).

Evidentemente es más complejo para los egipcios este cálculo que el del tronco de pirámide estudiado con anterioridad. No es tan intuitivo saber que el volumen de un cono es la tercera parte del volumen del cilindro que tiene el mismo diámetro, pero por asimilación con la relación entre el volumen de un ortoedro y una pirámide podrían haberlo desarrollado. Además la no utilización del radio, sino del diámetro, dificulta algo más su cálculo.

El volumen de un tronco de cono, un cuerpo geométrico generado por la rotación de un trapecio rectángulo alrededor de un eje que pasa por el lado perpendicular a sus dos bases. La fórmula para su cálculo es semejante a la del tronco de pirámide '**la tercera parte de la altura multiplicada por la suma del área de la base mayor más la de la base menor más la de la elipse que construirían con los ra-**

dios de las dos bases'.

$$V = \frac{h_t}{3}(\pi R^2 + \pi Rr + \pi r^2) = \frac{\pi h_t}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

... siendo "R" el radio de la base mayor y "r" el de la base menor.

Como los matemáticos egipcios no utilizaron, dentro de nuestros conocimientos actuales, el concepto de radio, calcularían el círculo mayor como

$$\left(\frac{8D}{9}\right)^2$$

... y el círculo menor

$$\left(\frac{8d}{9}\right)^2$$

... pero habrían tenido problemas para calcular el área de la elipse πRr sin utilizar los radios.

Su cálculo por integración se puede ver en el Anexo 12.

Conociendo que el área de un círculo para los egipcios es $64d^2/81$, basta con multiplicarlo por la altura para conocer el volumen de un cono.

$$V_{cono} = \frac{1}{3}A_{base}.altura = \frac{64d^2}{243}$$

Por asimilación con el volumen de un tronco de pirámide.

El volumen del tronco de cono se podría haber calculado como la resta entre el volumen del cono grande y el pequeño. Además por asimilación con el volumen del tronco de pirámide

$$V_{tp} = \frac{h}{3}(B^2 + Bb + b^2)$$

... habrían obtenido

$$V_{tp} = \frac{256h}{243}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{h}{3}\left(3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}\right)(R^2 + Rr + r^2)$$

... ya que el valor de π para los egipcios era 256/81, pero como no utilizan el radio sino el diámetro

$$\frac{h}{3}\left(3+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}\right)\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2+\frac{D}{2}\cdot\frac{d}{2}+\left(\frac{Dd}{2}\right)^2\right]$$

$$\frac{h}{12}\left(3+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}\right)(D^2+Dd+d^2)$$

En el papiro griego de Akhmîm, fechado en época bizantina, de los tres problemas geométricos que se describen (BAILLET, 1892, págs. 63-88) hay un problema relativo al cálculo del volumen de un tronco de cono conociendo

[δεύ]τερον, τὸ δὲ δ′ ιζ δεύ-
[τερ]ον ί′β′, γείνεται τιβ′.
[ἡ δ]ὲ δευτέρα χώρα ἐστὶ
[δ]ακτύλων κγγ′ καὶ δι-
60 [πλα]σι[ασ]θέντος γείνε-
[ται μ]ϛβ′, ἄφελε τὸ β′
[τῆς] συ[σ]τολῆς, λοιπαὶ μϛ,
[τὸ] (ἥμισυ) κ[γ, ἐπὶ γ] ξθ, ὧν τὸ
[γ′ κ]γ, τ[ὸ δὲ δ′ ι]ζδ′, ἐπὶ ιγ
65 [γεί]νετ[αι] τιε (ἥμισυ) ί′ε′, ἐξ ὧν
[ἄφε]λ[ε τὸ ί′]ϛ′, λοιπαὶ τοϛ (ἥμισυ).
ἐν . [. . . .] τῇ τρίτῃ γραμ-
μ[ῇ ε]ἰσ[ι]ν δάκτυλοι κββ′
[ἐπὶ γ γείνε]ται ξε, τὸ [γ′
70 [καβ′,] τ[ὸ δ′ ιϛ]δ′, {ταισβ}
ἐπὶ καβ′, γίνεται εί′β′,
ὧν ἄφελε μίαν, λοιπαὶ
δί′β′. ε καγ′, δίπλωσον
μββ′, ἄφελε β′, λοιπαὶ μβ,
75 τὸ ἥμισυ κα, ἐπὶ γ γεί-
νεται ξγ, τὸ γ′ κα, τὸ
τέταρτον ιεβ′ί′β′, ἐπὶ
μα γείνεται τοβ′ί′β′, ἄ-
φελε αβ′ λοιπαὶ τξβ′.
80 ϛ κβ′, μδ′ ἀφαιρεθέν-
τος τοῦ διμοίρου, τὸ (ἥμισυ)
κγ′, ἐπ[ὶ] γ ξα, τὸ γ′ {ἐπὶ}
κγ′, τὸ δ′ ιεδ′, ἐπὶ κγ′
τί′β′, ἄφελε β (ἥμισυ), λοιπαὶ
85 τὸ (ἥμισυ) ί′β′. ζ ἀριθμὸς κδ
ιϛ μ, ἀφαίρει β′, λοιπαὶ
λθγ′, ὧν τὸ ἥμισυ ιεβ′.

ρολογίων ἀριθμὸν τῆς [κα-
τασκευῆς οὕτως ἀ[πο-
διδόασιν, τὸ μὲν ἄνω [
35 ὁλμίσκου δακτύλων [κδ
ποιοῦντες, τὸν δὲ πυθμέν[α
ιβ δακτύλων, τὸ βάθος δ[α-
κτύλων ιη. ἐὰν προ[σθῶ-
μεν τοὺς κδ δακ[τύλους
40 τοῖς ιβ τ[οῦ πυ]θμ[ένος
ἔσονται ι δάκτυλοι λϛ,
ὧν τὸ ⟨ἥμισυ⟩ ιη, ἐπὶ γ γείνον-
ται διὰ τὴν περιφερίαν
νδ, τούτων τὸ τρίτον ιη,
45 τὸ δ′ ιγ (ἥμισυ). ποιεῖ τη ἐπὶ η
γείνεται ρμγ, ποιεῖ οὕτως Σδ.
[. . .]β ε[. . . .]ε[. . . . .
[. . .]η κ[α]τὰ δίμοιρον. γεί-
[νετ]αι οὖν πρώτη γραμ-
50 [μὴ .] . [. . .] κδ, δι[[α]]πλασιασ-
[θέν]τος τοῦ ἀριθμοῦ γεί-
νετ]αι μη, ὧν ἄφελε τὸ
β′, λο]ιπαὶ μζγ′, τούτων
δ] (ἥμισυ) {κ′} κ⟨γ⟩β′, ἐπὶ τὸ τρίτον
γείν]εται οα, τὸ δὲ γ′ κγ

el perímetro de sus bases, 12 y 20, y una altura de 6 1/2 (CHACE, 1927, pág. 143).

Entre los papiros de Oxyrhynchus, escrito en griego y fechado en el siglo III d.C., se localizó un pequeño tratado matemático, de 16,7 por 19 cm., que contiene, al parecer, instrucciones para la construcción de instrumentos astronómicos. Desde la línea 31 al final del documento se dan los datos necesarios para la fabricación de una clepsidra (GRENFELL, 1903, pág. 142) en forma tronco-

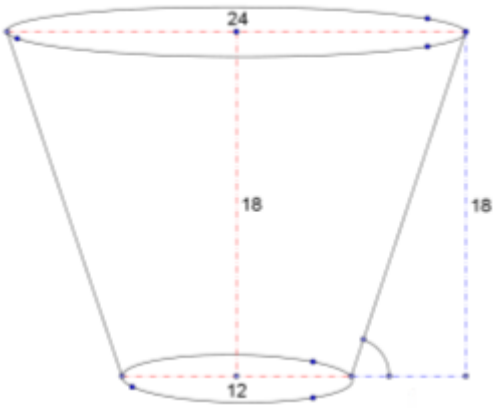
cónica de 24 dedos de diámetro superior (45,36 cm.), un diámetro inferior de 12 dedos, la mitad del superior (22,68 cm.), y una profundidad de 18 dedos, el promedio de ambos (34,02 cm.).

El valor de la tangente, cociente entre la longitud del cateto opuesto y el adyacente, es 3 (18 entre 6 es 3), lo que se corresponde con un ángulo de 71º33'54,18''4, bastante inferior al reconocido como ángulo perfecto para que el flujo determine alturas iguales de descenso del líquido en tiempos iguales, que se corresponde con la tangente 9/2 (CLAGETT M. , 1995, pág. fig. III.29), 77º28'16,29''.

El autor del manuscrito calcula, como ejercicio matemático, el volumen correspondiente a los seis primeros dedos siguiendo la fórmula

$$V_{tc} = h\frac{\pi}{3}\left(\frac{D+d}{2}\right).\frac{\pi}{4}\left(\frac{D+d}{2}\right) = h\frac{\pi^2}{12}(D^2 + 2Dd + d^2)$$

... siendo "D" el valor del diámetro de la base mayor y "d" el de la base menor



Utilizando el valor de π como 3, siguiendo las normas de la época, se asimila al volumen de un cilindro que tiene como diámetro la semisuma de los diámetros de las dos bases del tronco de cono. A saber, el volumen de un cilindro es el área de la base (πr^2) por la altura.

$$V_c = \pi h\left(\frac{D+d}{2}\right)^2 = h\frac{\pi}{4}(D^2 + 2Dd + d^2)$$

Aplicando el valor de π en ambas fórmulas obtenemos

$$h\frac{3}{4}(D^2 + 2Dd + d^2)$$

Veamos cómo calcula el matemático el volumen correspon-

diente a un tronco de cono situado en el centro de la clepsidra. Si la altura es 1 dedo, la fórmula queda

$$V_{tc} = h\frac{\pi}{3}\left(\frac{D+d}{2}\right).\frac{\pi}{4}\left(\frac{D+d}{2}\right) = \left(\frac{D+d}{2}\right).\frac{3}{4}\left(\frac{D+d}{2}\right)$$

$$V_{tc} = \left(\frac{24+12}{2}\right).\frac{3}{4}\left(\frac{24+12}{2}\right) = 18\left(13+\frac{1}{2}\right) = 243$$

Observad que el valor utilizado sería la semisuma de un diámetro situado 1/2 dedo por debajo y 1/2 dedo por encima.

Un simple cálculo de triángulos semejantes nos permite hallar cuánto varía el diámetro de las diferentes secciones en relación con la altura.

$$\frac{altura\ del\ triángulo\ pequeño}{altura\ del\ triángulo\ grande} = \frac{base\ del\ triángulo\ pequeño}{base\ del\ triángulo\ grande}$$

$$\frac{1}{18} = \frac{x}{6}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

... por cada lado. Así que los diámetros se incrementan 2/3 de dedo por cada dedo de altura.

Ilustración 9. Facsímil del recto del texto matemático de los papiros de Oxyrhynchus (BORCHARDT L. , 1920, pág. placa 7).

Veamos en una tabla los cálculos realizados por el matemático egipcio en el documento de Oxyrhyncus.

Diámetro superior	Diámetro inferior	Diámetro promedio	Volumen real
24	23 1/3	23 2/3	420 1/12
23 1/3	22 2/3	23	396 3/4
22 2/3	22	22 1/3	374 1/12
22	21 1/3	21 2/3	352 1/12
21 1/3	20 2/3	21	330 3/4
20 2/3	20	20 1/3	310 1/12

Los resultados mostrados en el papiro son muy diferentes aunque las operaciones planteadas son correctas.

Volumen manuscrito	Volumen real
300 1/12	420 1/12
396 1/2	396 3/4
	374 1/12
5 1/2	352 1/12
370 3/4	330 3/4
300 1/12	310 1/12

Ilustración 10. Facsímil del verso del texto matemático de los papiros de Oxyrhynchus (BORCHARDT L., 1920, pág. placa 8).

Estudiemos ahora las características geométricas de la clepsidra de Karnak (Cairo 37525), fechada en el reinado de Amenhotep III, rey de la XVIII dinastía. Las medidas del instrumento son: altura exterior 35 cm. (18 1/2 dedos), altura interior 32,6 cm. (17 1/4 dedos), diámetro superior externo 49 cm. (26 dedos) y el diámetro inferior externo 27,5 cm. (14 1/2 dedos) (OBENGA, 1995, pág. 204) (LULL, 2006). El grosor tomado como la resta entre la altura exterior y la interior se correspondería a 2,4 cm.

Con estos datos se consigue tener un volumen de

$$V = \frac{h}{3}\pi(R^2 + Rr + r^2) =$$

$$= \frac{32,6}{3}\pi\left[\left(\frac{49}{2} - 2,4\right)^2 + \left(\frac{49}{2} - 2,4\right)\left(\frac{27,5}{2} - 2,4\right) + \left(\frac{27,5}{2} - 2,4\right)^2\right] =$$

$$= 29.634,64402\ cm^3 \approx 29,63\ L$$

El ángulo que forma la cara inclinada con la horizontal calculado en el exterior de la clepsidra es de 72°55'33,72'' equivalente a una tangente de

$$\tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{35}{\frac{49 - 27,5}{2}} = 3,2558$$

[5] El problema tiene 1/45. El matemático ha multiplicado la última fracción en vez de dividirla.
[6] En el papiro 2/3.
[7] Podría tratarse de una lámina de papiro que tiene que dividirse en pequeños trozos.
[8] Línea que aparece muy alterada según la página del museo Petrie.
[9] La demostración del área de una semiesfera por integración se encuentra en el anexo 9.
[10] En Wb 78 encontramos el dual *jnr.ty* haciendo referencia a los dos huevos que se originaron de Djehuty (Thot).

Como dibujaban un arco

En un ostracon calizo del Reino Antiguo fechado en la III dinastía proveniente del yacimiento arqueológico de Saqqara se ha inscrito un dibujo transportable que parece indicarnos la forma en la que dibujar un arco a partir de varios puntos.

Ilustración 11. Ostracon calizo procedente del yacimiento arqueológico de Saqqara en el que parece describirse el procedimiento para el dibujo o construcción de un arco (WOLFF, 1941, pág. 266).

Se han conservado 5 líneas de escritura de diferentes alturas con números en codos, palmos y dedos pareciendo indicar la longitud de la semirrecta situada a su izquierda. Si traducimos su numeración comenzando por la altura máxima tendremos en la primera línea se lee 3 codos 3 palmos y 2 dedos (98 dedos; 3 codos por 28, 84, más 3 palmos por 4, 12, y 2 dedos); en la segunda línea 3 codos 2 palmos y dos tres dedos (95 dedos; 3 codos por 28, 84, más 2 palmos por 4, 8, y 3 dedos); en la tercera línea, si no se ha perdido ningún signo, tendríamos 3 codos (84 dedos; 3 codos por 28); en la cuarta línea 2 codos y 3 palmos (68 dedos; 2 codos por 28, 56, más 3 palmos por 4,12); en la quinta línea 1 codo, 3 palmos y 1 dedo (41 de-

dos; 1 codo por 28, 28, más 3 palmos por 4, 12, y 1 dedo).

Debajo un esquema numérico del ostracon considerando una base de 1 codo, 28 dedos, en cada columna.

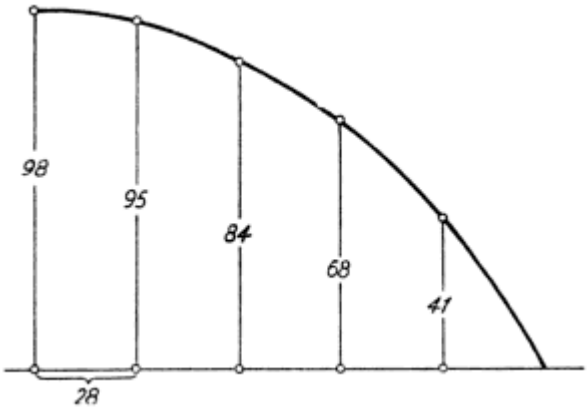


Ilustración 12. Esquema numérico del ostracon calizo procedente del yacimiento arqueológico de Saqqara en el que parece describirse el procedimiento para el dibujo o construcción de un arco (WOLFF, 1941, pág. 267).

Arquitectónicamente podría haber servido para la construcción de una pequeña bóveda, por ejemplo para un granero. Se conocen bóvedas de cañón en Egipto en época más tardía, en el Reino Nuevo. Un ejemplo palmario de este tipo de arquitectura se puede admirar en los almacenes del Ramesseum, templo mortuorio de Ramsés II (XIX dinastía), edificado en la orilla occidental tebana.

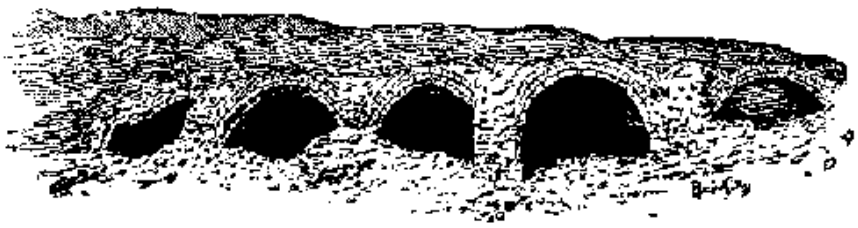


Ilustración 13. Dibujo de las bóvedas de los almacenes del Ramesseum, templo funerario de Ramsés II (MASPERO, 1895, pág. 29).

Otra posibilidad que nos presenta el ostracon es que se tratara de un ejercicio de cálculo del área bajo la curva. En la actualidad se halla aplicando la regla de Barrow para la resolución de la integral definida de la ecuación de la curva. Si la pretensión del egipcio era calcular el área tendría que haber aplicado un método semejante al desarrollo de áreas por trapecios, lo que genera una buena aproximación.

Conocemos que el área bajo una curva se encuentra comprendida entre la suma del área de los rectángulos superiores (con

base en el valor superior)

... y la de los inferiores (con base en el rectángulo inferior).

Según aumentamos el número de rectángulos la aproximación es mejor. Si su número aumenta indefinidamente, tenemos la integral.

Si en vez de utilizar las áreas de los rectángulos usamos trapecios la aproximación mejora.

Sabemos que los egipcios conocían cómo calcular el área de un trapecio como vimos en el problema 52 del PMR. Hallemos el área bajo la curva del ostracon de Saqqara en dedos cuadrados, comenzando por el trapecio de la izquierda.

El área del trapecio es la semisuma de las base por la altura.

$$A_t = \frac{B+b}{2}h$$

Primer trapecio

$$A_1 = \frac{98+95}{2}28 = 2702\ dedos\ cuadrados$$

Segundo trapecio

$$A_2 = \frac{95+84}{2}28 = 2506\ dedos\ cuadrados$$

Tercer trapecio

$$A_3 = \frac{84 + 68}{2} 28 = 2128\ dedos\ cuadrados$$

Cuarto trapecio

$$A_4 = \frac{68 + 41}{2} 28 = 1526\ dedos\ cuadrados$$

El último trapecio es en realidad un triángulo cuya área es el semiproducto de la base por la altura.

$$A_5 = \frac{41x28}{2} = 574\ dedos\ cuadrados$$

La suma total es 9436 dedos cuadrados.

Realicemos las conversiones a codos cuadrados conociendo que un codo cuadrado equivale a 784 dedos cuadrados (28 dedos por 28 dedos).

$$9436\ dedos\ cuad. \frac{1\ codo\ cuadrado}{784\ dedos\ cuad.} = 12 + \frac{1}{28} codos\ cuadrados$$

Las Matemáticas en el papiro Reisner 1

En este documento, fechado en la XII dinastía, custodiado en el museo de Bellas Artes de Boston (38.2062) se inscribieron algunas anotaciones matemáticas que pasamos a estudiar.

Cálculo del volumen de un ortoedro

En la sección G del manuscrito aparece una tabla con los volúmenes de diferentes recintos templarios calculados sin indicar procedimiento alguno. Sin duda el escriba realizó los cálculos multiplicando el largo por el ancho y por el alto, como nos indica el encabezamiento, procedimiento universal para hallar el volumen de un ortoedro.

Placa G del PR1

En las celdas marcadas de rosa se han transcrito los valores posibles, mientras que los números en rojo pertenecen a las correcciones de Gillings. Las líneas con desarrollo matemático correcto se rellenan de verde.

PAPIRO REISNER (placa G)							
número de línea	largo	ancho	profundo	unidades	volumen	división por 10	detalle
2	38	12	7	1	3192	319 1/2	
3	25	20					
4	15	5					cámara augusta
5	3	2	2	1	12	1 1/5	cámara

6	8	5	1/4	1	10	1	capilla oriental
7	3	2 ½	1/4	1	1 1/2 1/4 1/8[11]	1/10 1/20 1/40 1/80	
8	35	11	1/4	1	192 1/2	19 1/4[12]	
9	13	11	1 1/2	1	214 1/2	21 1/41/5[13]	
10	52	3	1/4	1	39	3 2/3 1/5 1/30[14]	
11	32	4	1/2	1	64[15]	6 1/3 1/15	
12	3 1/2	2	2/3	1	4 2/3	1/3 1/10 1/30[16]	recinto amuralla-do
13	10 1/2	8 1/2	1/3	1	29 1/2 1/4[17]	2 2/3 1/5 1/20 1/30 1/40	cámara de vigilancia
14	8	3	2/3	1	8	1/2 1/4 1/20	
15	6	4	2	1	48	4 1/2 1/4 1/20	sustentar columnas
16	4	2	2	1	16	1 1/2 1/10	
17	4	4	2	2	64	6 1/4 1/10 1/20	plantas
18	3	3	2	2	36	3 1/2 1/10	plantas
TO-TAL					4.335	433 1/2[18]	

Veamos la transcripción en jeroglíficos.

(4)

[…] *m ꜥt špst*

[…] en la cámara augusta.

(5)

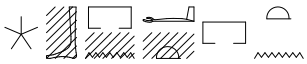
[…] *m ꜥt tn*

[...] en esta cámara.

(6)

rdyt n.f m kꜣr[19] *jꜣbty n ꜣḫwt*

Lo que se le dio en la capilla oriental de las tumbas.

(7) 

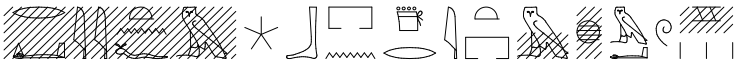
[…] *sbꜣ n ꜥt tn*

[...] en la puerta de esta cámara.

(8)

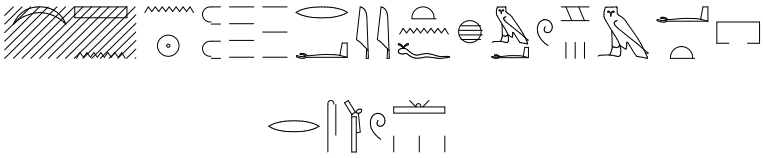
ꜣbd [...] *šmw sw* [...] *rdyt n.f m* [...]

En el mes [...] de la estación de **shemu**, el día [...] lo que se le dio en [...]

(12) 

rdyt n.f m sbꜣ n ḏrjt m ḫmꜥ

Lo que se le dio en la puerta del recinto amurallado como la tierra reunida (?)

(13) 

ꜣbd […] *šmw sw 27 rdyt n.f* (*m*) *ḫmꜥt m ꜥt rsw*

En el mes [...] de la estación de **shemu**, el día 27, lo que se dio como tierra reunida en la cámara de vigilancia[20].

(14)

rdyt n.f m ꜥt tn

Lo que se le dio en esta cámara.

(15)

ꜣbd […] *šmw sw 27 rdyt n.f m ḫmʿt r wḫꜣ spwt*

En el mes [...] de la estación de **shemu**, el día 27. Lo que se le dio como tierra reunida para sustentar las bases de las columnas.

(17)

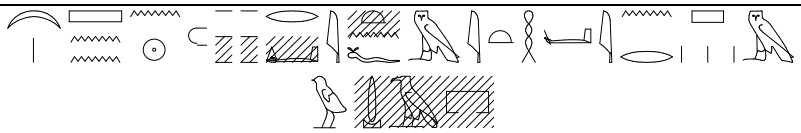
ꜣbd [...] *rdyt n.f* [...] *ṯbwt* [...]

En el mes [...] Lo que se le dio [...] planta [...]

Placa H del PRI

Continúa calculando los volúmenes de ortoedros.

PAPIRO REISNER (placa H)



ꜣbd 1 šmw sw 16 rdyt n.f m jṯh jnr m wḏꜣ

En el primer mes de la estación de **shemu**, el día 16. Lo que se le dio en la extracción de la piedra del almacén

número de línea	largo	ancho	profundo	unidades	volumen detalle
2	2 y 5 palmos	6 palmos	[21]	2	4 y 1 1/3 dedos
3	2 1/4	6 palmos	5 palmos	1	1, 2 palmos y 2 1/2 1/14 dedos
4	2 1/4	6 palmos	5 palmos	1	1, 2 palmos y 2 1/2 1/14 dedos
5	2 1/4	6 palmos	[22]	1	1, 3 palmos 1 1/2 dedos
6	4 1/4			2	6 1/2 1/4
7	3 1/4	1 1/2	1/2	2	4 1/2 1/4 1/8
8	2 1/2	1 1/2	1/2	1	1 1/2 1/4 1/8
9	4 1/2	1 1/2	1[23]	2	13 1/2
10	4 y 1 palmo	1 1/2	1/2	1	3 y 3 dedos

11	3 y 1 palmo	1	1[24]	1	3 y 1 palmo
3bd 1 šmw sw 28 spt (dmḏ) 15 En el primer mes de la estación de **shemu**, el día 28, base de columnas... (total) 15[25].					
13	2 y 3 palmos	2 y 3 palmos	2/3	1	3, 6 palmos y 2 1/14 1/28 dedos[26]
3bd 1 šmw sw 29 En el primer mes de la estación de **shemu**, el día 29.					
14	2 y 2 dedos	1 1/2	1, 1 palmo y 1 dedo	1	3, 4 palmos y 2 1/2 1/28 dedos[27]
15	1 y 5 dedos	1 1/2	5 palmos	2	3, 4 palmos y 2 1/2 1/4 1/14 1/28 dedos[28]
16	2 y 3 palmos	1 y 4 palmos	5 palmos y 2 dedos	1	2, 5 palmos y 2 1/2 dedos[29]
17	4	1 y 3 palmos	1	4	22 y 6 palmos
18	3 y 2 palmos	1 y 2 palmos	6 palmos	1	3, 4 palmos y 1 1/3 1/15 dedos[30]
19	3, 5 palmos y 2 dedos	1 y 3 palmos	1	1	5, 2 palmos y 3 1/4 1/7 y 1/28 dedos[31]
20	3 y 3 palmos	1 y 3 palmos	1	1	4 y 1/4 1/28 palmos[32]
21	1 y 5 palmos	1 y 3 palmos	1	1	2, 3 palmos 1/2 1/14 dedos[33]
3bd 1 šmw sw ꜥrḳy En el primer mes de la estación de **shemu**, el último día.					
22	1 2/3	1 y 3 palmos	1	1	2, 2 palmos y 2 2/3 dedos[34]
23	4	1 y 6 palmos	6 palmos	1	6, 2 palmos y 2 ¼ 1/28
24	3 y 5 palmos	1 y 2 palmos	6 palmos	1	4 y 2 1/3 1/5 1/15 dedos[35]
3bd 2 šmw sw 1					

En el segundo mes de la estación de **shemu**, el primer día.					
25	1 1/2	1/2 1/4	1	2	2 1/4
26	2 1/2	1/2 1/4	1 1/2	2	3 1/2 1/4
27	3 1/2	1 1/2	1 1/2	2	15 1/2 1/4
ꜣbd 2 šmw sw 1 En el segundo mes de la estación de **shemu**, el día 7.					
28	4 y 4 palmos	1 y 5 palmos	1 y 2 palmos	2	20, 1 palmo y 1/4[36]
rdyt n.f m ḏbꜣw m šꜥ ꜥt ꜥꜣt Lo que se le dio en pago por la arena de la cámara grande.					
ꜣbd 4 prt En el cuarto mes de la estación de **peret**,					
30	12	5	1/4	1	15
sw 15 ... el día 15.					
31	15	5	¼	1	18 1/2 1/4
kꜣj jꜣbty La capilla oriental.					
32	8	5	1/4	1	10
ṯbwt ..... ꜣbd 1 šmwsw La planta... el primer mes de la estación de **shemu**, el día					
33	4	4	2	2	64
26 26.					
34	3	3	2	2	36
ꜣtpw pr sꜣw Cargas del dominio de la compañía de sacerdotes.					

35	8	9[37]	¼	1	18

36				50 de remanente
37	*sb3 ꜥ3* La puerta grande		100 1/2	99 ... 45 1/2
38	*k3j* Capilla		16	
39	*spt* Base de columna		3, 6 palmos y 1 dedo	
40	*ꜥt ꜥ3t* La cámara grande		23 1/2	total 143 y 2 palmos
41	*šꜥ* Arena			143 1/2 1/4

Placa 1 del PR1

Continúa el cálculo.

PAPIRO REISNER (placa I)					
3bd 4 prt sw 15 En el cuarto mes de la estación de **peret**, el día 15.					
número de línea	largo	ancho	profundo	unidades	volumen detalle
rdyt n.f m sḫt s3ṯw Lo que se le dio en el golpeo de la tierra.					

ꜥt ꜥꜣt La cámara grande.					
2	12	5	1/2	1	30
ꜥt špst La cámara augusta					
3	5	5	1/2	1	37 1/2
kꜣj jꜣbty ꜣḫwt La capilla oriental del "akhety"					
4	8	5	1/2	1	20
m ḫr r [...]					
5	18	11	2/3	1	132
mꜣḫw jmnty La "makhu" occidental.					
6	32	4	1/4	1	32
mꜣḫw jꜣbty La "makhu" oriental.					
7	52	3 **[298]**[38]	1/4	1	39
m ḏbꜣw ꜥt ꜥꜣt ... como suministros de la gran cámara.					
8	24	5 palmos	1/2	1	8 codos y 4 palmos
ꜣbd 1 šmw sw 28 rdyt n.f m fꜣw srft El primer mes de la estación de **shemu**, el día 28. Lo que se le dio como transportes de "serefet".					
9	26	2	5 palmos	1	111 codos 3 palmos

10	20	5	5 palmos	1	71 codos palmos
11					
m sfḫ m ppt ... en la liberación de los ladrillos de adobe					
12	27	7	2	1	378
ꜣbd 2 šmw sw […] *rdyt n.f m srw mw m ḥꜣt* En el segundo mes de la estación de **shemu**, el día [...]. Lo que se le dio por la eliminación del agua en el campo.					
13	8	7	2	1	112
ꜣbd 2 šmw sw […] *rdyt n.f m qdw m swnw* En el segundo mes de la estación de **shemu**, el día [...]. Lo que se le dio por los constructores en la torre.					
14	1 1/2	1 1/2	2	2	9
15	2 1/2	1 1/2	1 1/2	2	11 1/4
16	3 1/2	2 1/2	1 1/2	2	26 1/4[39]
17	4	2 1/2 **[81 1/2]**	1 1/2	2	30[40]
ꜣbd 2 šmw sw 10 […] *kmt n.f m ppt ḥꜣwt* En el segundo mes de la estación de **shemu**, el día 10 [...]. Lo que se le completó en ladrillo de adobe de los campos.					
18	10	5 1/2 **[6 palmos]**	1[41]	1	55
19	16	5 1/2	6 palmos	1	75 1/4 1/5
20	8	6 **[556 1/4]**	1	1	48
kmt n.f m ḏbwt ꜥꜣt Lo que se le completa con ladrillos grandes.					

[11] En el manuscrito leemos 2 ½ que da como décima parte 1/5 1/20.

[12] En el manuscrito 19 ½.
[13] El escriba da un valor aproximado 21 ½.
[14] El escriba lo aproxima a 4.
[15] El escriba tiene 85. Luego, calcula la décima parte de 85 correctamente (8 1/2).
[16] El escriba pone ½ como valor aproximado.
[17] El escriba tiene 27. Luego, calcula la décima parte de 27 correctamente (2 ½ 1/5).
[18] El escriba tiene 435.
[19] Podría ser *k3i*.
[20] Clagett traduce '*emptying*'.
[21] Gillings da 6 palmos y 1 dedo, pero añade que es demasiado grande.
[22] Gillings da 5 palmos y 2 dedo, pero añade que es demasiado grande.
[23] Hay una fracción de 1/3 que ha podido ser eliminada porque aparece subrayada.
[24] Hay una fracción de 1/3 que ha podido ser eliminada porque aparece subrayada.
[25] Parece que deberían ser 14.
[26] El escriba tiene 3, 6 palmos y 3 dedos (aproximación) [recordemos que las medidas de la última columna son volumétricas, es decir cúbicas].
[27] El escriba tiene 3, 6 palmos y 1 1/2 dedos (aproximación).
[28] El escriba tiene 3 codos y 5 palmos (aproximación).
[29] Parece más aproximado, siguiendo a Gillings, 2, 6 palmos y 3 ½ dedos.
[30] El escriba tiene 3 codos, 3 palmos y 2 1/3 dedos.
[31] El escriba tiene 4 codos, 2 palmos y 3 dedos.
[32] El escriba tiene 5 codos.
[33] El manuscrito está alterado en este punto. Se nota 2 codos, 4 palmos y....
[34] El escriba tiene 2 codos, 2 palmos y 2 dedos.
[35] Parece mejor aproximación que la propuesta por el escriba, 4 codos y 2 dedos.
[36] Es mejor aproximación que 1 ½ del escriba.
[37] El escriba tiene 5.
[38] Los números entre corchetes y en negrilla aparecen en rojo en el manuscrito.
[39] En el manuscrito se lee 25 1/4.
[40] En el papiro se lee 36.
[41] En el manuscrito se lee 1/4.