Aprender las matemáticas egipcias

Ángel Sánchez Rodríguez

2014

Amigos de la Egiptología
www.egiptologia.com

Índice

Índice I
Problemas de equivalencias 147
Problema 72 del PMR 147
Problema 69 del PMR 148
Problema 70 del PMR 150
Problema 71 del PMR 152
Problema 73 del PMR 153
Problema 74 del PMR 153
Problema 75 del PMR 154
Problema 76 del PMR 154
Problema 77 del PMR 156
Problema 78 del PMR 156
Problema 15 del PMM 156
Problema 5 del PMM 157
Problema 9 del PMM 158
Problema 12 del PMM 159
Problema 16 del PMM 160
Problema 20 del PMM 161
Problema 22 del PMM 162
Problema 24 del PMM 162
Repartos proporcionales 165
Problema 63 del PMR 165
Problema 65 del PMR 166
Problema 68 del PMR 167
Problema 39 del PMM 168

Un problema de regla de aligación 168
Problema 21 del PMM 169
La proporcionalidad en la cámara real de la pirámide de Khufu (Keops) 169
Progresiones 171
Progresiones aritméticas 171
Problema 40 del PMR 171
Problema 64 del PMR 174
Problema 1 del PK 176
Progresiones geométricas 179
Problema 79 del PMR 180
La administración de una granja 183
Problema 82 del PMR 183
Problema 82B del PMR 185
Problema 83 del PMR 186
Problema 84 del PMR 186
Cálculo de áreas 189
Cálculo del área de un círculo 190
Problema 48 del PMR 191
Problema 50 del PMR 197
Cálculo del área de un rectángulo 197
Problema 49 del PMR 199
Problema 6 del PMM 199
Problema 18 del PMM 200
Cálculo del área de un triángulo 200
Problema 51 del PMR 202
Problema 7 del PMM 203
Problema 17 del PMM 205
Cálculo del área de un trapecio 206
Problema 52 del PMR 207
Cálculo del área de un trapezoide 208
Cálculo del área de una elipse 218
Cálculo de superficies mixtas 222
Problema 53 del PMR 222

Problemas de equivalencias

En una economía como la egipcia del periodo dinástico donde no existió la moneda hasta el siglo IV a.C. con la estatera de Nectanebo II, el último rey de la XXX dinastía, posiblemente para el pago de la soldada, se hacía necesario el trueque. Para establecer equivalencias en el comercio se estableció un sistema que comparaba la cantidad de grano necesaria para la fabricación de panes o de cerveza, bases del sistema de intercambio.

Ilustración 1. Moneda de oro de Nectanebo II (fuente: http://www.wildwinds.com/coins/greece/egypt/nektanebo_II/i.html)

Reciben el nombre de problemas de equivalencias, **pesu** (GILLINGS, 1972, pág. 128) o **pefsu** (CLAGETT, 1999, pág. 60), un grupo de problemas que comparan la calidad de diferentes panes o jarras de cerveza, dependiendo de la cantidad de trigo o cebada necesaria para su fabricación. Cuantos más panes se fabrican con la misma cantidad de cereal, el **pesu** es mayor, en realidad, son de menor tamaño (panes) o de peor calidad (cerveza) al fabricarse más viandas con la misma cantidad de materia prima.

Así tenemos

$$pesu\ (P) = \frac{número\ de\ panes\ o\ jarras\ de\ cerveza}{número\ de\ heqats\ de\ grano}$$

El **pesu** no es exclusivo de los problemas matemáticos. Un

buen ejemplo de esta proporción se encuentra en la lista de ofrendas de la fiesta de aparición de Sirio (Sopedet) del templo funerario de Ramsés III en Medinet Habu (CLAGETT, 1999, pág. 60).

En muchos ejercicios se utiliza una cerveza diluida de 4 pesu frente a la habitual, más fuerte, fabricada con grano del alto Egipto que tiene la mitad de pesu, 2 (CLAGETT, 1999, pág. 63).

Problema 72 del PMR

Si tenemos 100 panes de 10 "pesu" ¿cuántos panes de 45 "pesu" deben cambiarse por ellos?

En la actualidad aplicaríamos una proporción sencilla para resolverlo, lo que llamamos regla de tres directa, a más **pesu** más panes

$$\frac{100\ panes}{10\ pesu} = \frac{x\ panes}{45\ pesu}$$

... puesto que se fabricaron con la misma cantidad de grano.

$$heqats\ de\ grano = \frac{número\ de\ panes\ o\ jarras\ de\ cerveza}{pesu}$$

El resultado es 450 panes.

El procedimiento del escriba es diferente, algo más complejo.

El procedimiento del escriba es bastante más raro. Calcula el exceso de **pesu** (45 – 10 = 35), luego el exceso por unidad (35 dividido entre 10 = 3 ½ de exceso, el factor de conversión), que multiplicado por el número de panes iniciales, 100 panes, da 350 de exceso, que sumados a los 100 iniciales, totalizan 450.

$$\frac{(45-10)\ pesu}{10\ pesu} = 3\frac{1}{2} = \frac{(x-100)\ panes}{100\ panes}$$

...según la nomenclatura moderna.

Problema 69 del PMR

Disponemos de 3 1/2 heqats de grano que se utilizan para la fabricación de 80 panes ¿Qué pesu tienen?

Aplicando la fórmula correspondiente

$$pesu\ (P) = \frac{número\ de\ panes\ o\ jarras\ de\ cerveza}{número\ de\ heqats\ de\ grano}$$

... dividiremos 80 entre 3 1/2 **heqats**.

1	**3 1/2**
10	35
20	70
2	7
2/3	2 1/3
1/7	1/2
1/21	1/6
22 2/3 1/7 1/21	**80**

El **pesu** de los panes es

$$22+\frac{2}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{21}$$

Ahora efectúa la prueba multiplicando el valor del **pesu** por el número de **heqats** de grano.

1	**22 2/3 1/7 1/21**
2	45 1/3 1/4 1/28 [2/7] 1/14 1/42 [2/21]
1/2	11 1/3 1/14 1/42
3 1/2	**80**

Queda demostrar que las fracciones siguientes suman 1.

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{21}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}+\frac{1}{3}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{21}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}=$$

... agrupando aquellas fracciones con los mismos denominadores pares.

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{7}+\frac{2}{21}+\frac{1}{28}=$$

... aplicamos las equivalencias de la tabla 2/n del papiro.

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}+\frac{1}{28}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$$

El escriba utilizaría como base m = 42, el "denominador" mayor.

1	**42**
1/2	21
1/3	14

1/4	10 1/2
1/7	6
1/14	3
1/21	2
1/28	1 1/2
1/42	1
1/3 1/4 1/7 1/14 1/14 1/21 1/28 1/42 1/42	**42**

Ahora calcula la cantidad de grano que hay en cada pan en **ro** (1/320 **heqat**).

1	**320**
2	640
1/2	160
3 1/2	**1120 *ro***

Divide1120 **ro** entre 80 panes.

1	**80**
10	800
2	160
4	320
14	**1120**

La cantidad de grano por pan es 14 **ro**.

Estudia su equivalente en fracciones del ojo de Horus. Conocemos que 1/32 equivale a 10 **ro**, por lo que el equivalente es 1/32 **heqat** 4 **ro**.

Se verifica

1	**1/32 *heqat* 4 *ro***
2	1/16 1/64 *heqat* 3 *ro*
4	1/8 1/32 1/64 *heqat* 1 *ro*
8	1/4 1/16 1/32 *heqat* 2 *ro*
16	1/2 1/8 1/16 *heqat* 4 *ro*
32	1 1/4 1/8 1/64 *heqat* 3 *ro*
64	2 1/2 1/4 1/32 1/64 *heqat* 1 *ro*
80	**3 1/2 heqats**

Problema 70 del PMR

Disponemos de 7 1/2 1/4 1/8 heqats de grano que se utilizan para la fabricación de 100 panes ¿Qué pesu tienen?

Siguiendo el mismo procedimiento el egipcio divide el número de panes, 100, entre, los **heqats** de grano, 7 1/2 1/4 1/8.

1	**7 1/2 1/4 1/8**
2	15 1/2 1/4

4	31 1/2
8	63
2/3	5 1/4
12 2/3	**99 1/2 1/4**

Para alcanzar 100 falta 1/4 de **heqat**, valor que obtiene por el método de los **inversos cruzados**.

1/63	**1/8**
1/42 1/126 [2/63]	1/4

El valor en **pesu** es 12 2/3 1/42 1/126 que comprueba el escriba

1	**12 2/3 1/42 1/126**
2	251/3 1/21 1/63
4	50 2/3 1/14 1/21 1/126 [2/21 + 2/63]
1/2	6 1/3 1/84 1/252
1/4	3 1/6 1/168 1/504
1/8	1 1/2 1/12 1/336 1/1008
7 1/2 1/4 1/8	**100**

Sumando los enteros y las fracciones mayores a 1/4, obtenemos 99 1/2, por lo que el resto de fracciones deben sumar 1/2. Aplicamos un número base m = 1008, el denominador mayor.

1	**1/3**	**1/6**	**1/7**	**1/12**	**1/14**	**1/21**	**1/42**
1008	336	168	144	84	72	48	24
1/63	**1/84**	**1/126**	**1/168**	**1/252**	**1/336**	**1/504**	**1/1008**
16	12	8	6	4	3	2	1

La suma de los valores correspondientes es 504 (hay dos fracciones 1/21 y dos 1/126), la mitad de 1008.

De nuevo realiza el cálculo en **ro**.

1	**320**
2	640
4	1280
1/2	160
1/4	80
1/8	40
7 1/2 1/4 1/8	**2520**

... que se divide entre 100 panes obteniendo el valor de cada pan en *ro*, que transforma en fracciones del ojo de Horus siguiendo la tabla.

1	**320**
1/2	160
1/4	80
1/8	40
1/16	20

1/32	10
1/64	5

Lo que implica 1/16 1/64 **heqats** sean 1/5 **ro**.

Realiza la comprobación.

1	**1/16 1/64 *heqats* 1/5 *ro***
10	1/2 1/4 1/32 *heqats* 2 *ro*
100	7 1/2 1/4 1/8 *heqats*

Para el cálculo del factor 10 el matemático egipcio realiza las divisiones correspondientes: 10/16, 10/64 y 10/5.

1	**16**
1/2	8
1/4	4
1/8	2
1/2 1/8	**10**

Y

1	**64**
1/2	32
1/4	16
1/8	8
1/16	4
1/32	2
1/64	1
1/8 1/32	**10**

De forma semejante para el factor 100: 10 por 1/2 (5), 10 entre 4 (2 1/2), 10 entre 32 (1/4 1/16) y 10 por 2 **ro** (20 **ro** que equivalen a 1/16 **heqats**).

Problema 71 del PMR

Disponemos de una jarra "des" de cerveza que contiene 1/2 heqat de granos besha, de la que se vierte 1/4 de su capacidad y se rellena de agua. ¿Cuáles son los pesu de la cerveza diluida?

Al diluir el contenido el número de **heqats** desciende. El escriba calcula 1/4 de 1/2, obteniendo 1/8, la cantidad de **heqat** que se vacía. Lo que queda es la diferencia entre los **heqats** iniciales, 1/2, menos los vaciados, 1/8, convirtiéndose en 1/4 1/8 **heqat**. Ahora aplica la fórmula

$$pesu\ (P) = \frac{número\ jarras\ de\ cerveza}{número\ de\ heqats\ de\ grano} = \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$$

1	**1/4 1/8**
2	1/2 1/4
2/3	1/6 1/12
2 2/3	**1**

Conociendo que 1/3 + 1/6 es 1/2.

El número de pesu de la cerveza es 2 2/3.

Problema 73 del PMR

Disponemos de 100 panes de harina "uadjet" de 10 pesu que se intercambian por panes de 15 pesu ¿cuántos panes debemos recibir?

Ahora aplica la fórmula

$$número\ de\ heqats\ de\ grano = \frac{número\ de\ panes}{pesu\ (P)}$$

Primero calcula la cantidad de **heqats** de la que dispone dividiendo 100 panes entre 10 **pesu**, obteniendo 10 **heqats**. Y aplica la misma fórmula, pero despejando el número de panes.

$$número\ de\ panes = P\ (pesu)\ x\ cantidad\ de\ heqats$$

Multiplicando 15 por 10 alcanza el resultado pedido: 150 panes.

Problema 74 del PMR

Se intercambian 1000 panes de harina "uadjet" de 5 pesu con panes de 10 y de 20 pesus utilizando la mitad de harina para cada tipo ¿Cuántos panes de cada tipo deben cambiarse?

En primer lugar obtiene los **heqats** de grano utilizados en la fabricación de los 1000 panes, dividiendo el número de panes (1000) entre los **pesu** (5), resultando 200 **heqats** de harina, con los que debe fabricar el resto de panes. Divide entre 2 para calcular la cantidad de harina que debe utilizarse para cada tipo de pan, obteniendo 100 **heqats** de harina para cada uno de ellos.

Ahora aplica

$$número\ de\ panes = P\ (pesu)\ x\ cantidad\ de\ heqats$$

... con los dos tipos de panes. Primero multiplica 100 **heqats** por 10 **pesu**, obteniendo 1000 panes, y luego multiplica 100 **heqats** por 20 **pesu**, obteniendo 2000 panes.

Problema 75 del PMR

Disponemos de 155 panes de harina "uadjet" de 20 pesu que se intercambian por panes de 30 pesu ¿Cuántos panes puedo fabricar?

Ahora aplica

$$número\ de\ heqats\ de\ grano = \frac{número\ de\ panes}{pesu\ (P)}$$

Divide 155 panes entre 20 **pesu** para calcular los heqats de los que disponemos, dando como resultado 7 1/2 1/4 **heqats**.

1	**20**
7	140
1/2	10
1/4	5
7 1/2 1/4	**155**

Para calcular el número de panes basta con multiplicar los **heqats** de grano de los que disponemos por los **pesu** (7 1/2 1/4 por 30), obteniéndose 232 1/2 panes.

1	**7 1/2 1/4**
10	77 1/2
20	155
30	**232 1/2**

Se pueden fabricar 232 panes y medio.

Problema 76 del PMR

Si se intercambian 1000 panes de harina uadjet de 10 pesu por panes de 20 pesu y un número igual de panes de 30 pesu, ¿cuántos panes de 20 y de 30 pesu se intercambian?

Ya veremos como el egipcio complica el ejercicio. Nosotros calcularíamos el número de **heqats** de grano que hay en los 1000 panes dividiendo el número de panes (1000) entre los **pesu** (10), obteniendo 100 **heqats**. Ahora aplicaríamos la fórmula

$$número\ de\ panes = P\ (pesu)\ x\ cantidad\ de\ heqats$$

... para ambos tipos de panes.

$$\begin{cases} número\ de\ panes = 20x \\ número\ de\ panes = 30(100 - x) \end{cases}$$

Aplicando el método de igualación en el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas llegamos a la ecuación

$$20x = 30(100 - x)$$

... que resuelta nos da 60 **heqats**, valor que hay que multiplicar por 20 para obtener el número de panes de cada tipo, 1200.

Veamos el procedimiento utilizado por el egipcio.

Aplicando un método de **reducción a la unidad**, 1 pan del primer grupo se fabricará con 1/20 **heqat**, mientras que del segundo grupo será 1/30 **heqat**. De esta forma 2 panes, uno de cada grupo necesitarían 1/20 + 1/30 **heqat**, o lo que es lo mismo

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{1}{12}$$

Tomando como base m = 30 tenemos

1	**30**
1 1/2	20
2 1/2	

... o lo que equivaldría a

$$30\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30}\right) = 30\frac{1}{x}$$

$$2 + \frac{1}{2} = 30\frac{1}{x}$$

... en una notación más moderna.

Ahora divide 30 entre 2 1/2 para calcular el valor del "denominador" problema.

1	**2 1/2**
10	25
2	5
12	**30**

Con 1/12 de **heqats** se fabricará 1 pan de cada tipo, por lo que con 1 **heqat** se fabricarán 12, el valor obtenido por el escriba.

El número de **heqats** se calcula

$$número\ de\ heqats\ de\ grano = \frac{número\ de\ panes}{pesu\ (P)} = \frac{1000}{10} = 100$$

El número de panes de cada tipo se calcula multiplicando los 100 **heqats** por los 12 panes/heqat, resultando 1200 panes de cada tipo.

Se realiza la comprobación de los resultados

$$número\ de\ heqats\ de\ grano = \frac{número\ de\ panes}{pesu\ (P)} = \frac{1200}{20} = 60$$

Para los panes de 20 **pesu** se necesitan 60 **heqats**, 1/2 de 100 más 10, como muestra el papiro.

$$número\ de\ heqats\ de\ grano = \frac{número\ de\ panes}{pesu\ (P)} = \frac{1200}{30} = 40$$

Para los panes de 30 **pesu** se necesitan 40 **heqats**, 1/4 de 100 más 15.

Entre los dos tipos de panes suman los 100 **heqats** que decía el problema.

Problema 77 del PMR

Dispones de 10 jarras "des" de cerveza de 2 pesu que se quieren cambiar por panes de 5 pesu ¿Cuántos panes debo recibir?

$$número\ de\ heqats\ de\ grano = \frac{número\ de\ jarras}{pesu\ (P)} = \frac{10}{2} = 5\ heqats$$

$$número\ de\ panes = P\ (pesu)\ x\ heqats = 5\ x5 = 25\ panes$$

Se deben recibir 25 panes a cambio de la cerveza.

Problema 78 del PMR

Dispones de 100 panes de 10 pesu que se quieren cambiar por jarras de cerveza de 2 pesu ¿Cuántas jarras debo recibir?

$$número\ de\ heqats\ de\ grano = \frac{número\ de\ panes}{pesu\ (P)} = \frac{100}{10} = 10$$

$$número\ de\ jarras = P\ (pesu)\ x\ heqats = 10\ x\ 2 = 20$$

Se deben recibir 20 jarras de cerveza a cambio de los panes.

Problema 15 del PMM

Dispones de 10 heqats de grano del Alto Egipto ¿Cuántas jarras de cerveza de 2 pesu podré fabricar?

Sencillamente se aplica la fórmula.

$$número\ de\ jarras = pesu\ (P)\ x\ heqats\ de\ grano = 2\ x\ 10 = 20\ jarras$$

Se fabricarán 20 jarras.

Problema 5 del PMM

Dispones de 100 panes de 20 pesu que se quieren cambiar por jarras de cerveza de 4 pesu como si fuera cerveza de 1/2 1/4 ¿Qué cantidad de grano se necesita para elaborar una jarra de cerveza del Alto Egipto?

Los ejercicios del PMM nos hablan de dos tipos de cerveza, una cerveza débil, posiblemente de baja graduación, y otra más fuerte, fabricada con cebada del Alto Egipto, que tiene como **pesu** la mitad del **pesu** de la cerveza corriente, por lo que el número de jarras de cerveza que se pueden elaborar con la cebada del Alto Egipto será la mitad que las que se producen con cerveza corriente (1/2 1/4).

Estudiemos el problema. Calculamos la cantidad de grano con la fórmula

$$número\ de\ heqats\ de\ grano = \frac{número\ de\ panes}{pesu\ (P)} = \frac{100}{20} = 5\ heqats$$

$$número\ de\ jarras = P\ (pesu)\ x\ heqats = 4\ x\ 5 = 20\ jarras$$

Se fabrican 20 jarras de cerveza de baja calidad. Atendiendo a que el **pesu** de la cerveza fuerte es la mitad del **pesu** de la cerveza corriente, se pueden elaborar 10 jarras, la mitad. Como disponemos de 5 **heqats** de grano, el número de **heqats** de grano del Alto Egipto por jarra de cerveza será 1/2 **heqats** (5 entre 10).

El matemático realiza la prueba como sigue. Sabemos que el **pesu** de la cerveza de alta calidad es la mitad del **pesu** de la de baja calidad, 2 **pesu**. Valor que bastaría para calcular el número de jarras multiplicando por los 5 **heqats** de grano.

El escriba sigue otro método. Considera que la necesidad de grano para fabricar la cerveza es la mitad del grano aportado manteniendo el **pesu** original. Multiplica 1/2 por los 5 **heqats** obteniendo 2 1/2 **heqats**, que multiplicado por los 4 **pesu** da el número de jarras de cerveza fuerte, 10.

El **problema 8** del PMM es igual.

Problema 9 del PMM

Dispones de 16 heqats de grano del Alto Egipto ¿Qué cantidad utilizarás para fabricar 100 panes de 20 pesu dejando el resto para cerveza de 2 pesu, 4 pesu y 6 pesu como la cerveza de malta de 1/2 1/4? ¿Cuántas jarras de cerveza fabricarás con el sobrante?

Primero calculamos el número de **heqats** que se necesitan para elaborar los100 panes.

$$número\ de\ heqats\ de\ grano = \frac{número\ de\ panes}{pesu\ (P)} = \frac{100}{20} = 5\ heqats$$

Se utilizarán 5 **heqats** de grano para fabricar los panes. Si los restamos de 16, los **heqats** iniciales, nos quedan 11 **heqats** para la fabricación de la cerveza.

El siguiente paso es calcular la cantidad de grano que necesita para la elaboración de una jarra de cada uno de los diferentes tipos de cerveza.

$$número\ de\ heqats\ de\ grano = \frac{1\ jarra\ de\ cerveza}{pesu\ (P)} = \frac{1}{2}$$

$$número\ de\ heqats\ de\ grano = \frac{1\ jarra\ de\ cerveza}{pesu\ (P)} = \frac{1}{4}$$

$$número\ de\ heqats\ de\ grano = \frac{1\ jarra\ de\ cerveza}{pesu\ (P)} = \frac{1}{6}$$

Sumará los tres valores obtenidos, resultando

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$$

Como la cerveza que se nos pide es de mayor calidad (se sabe por los problemas 5 y 8 del PMM que la cerveza del Alto Egipto tiene la mitad de **pesu** que la cerveza corriente de malta o lo que es lo mismo, que necesita doble cantidad de grano para su fabricación), multiplica este valor por 2, obteniendo 1 2/3 1/6.

$$2n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)\frac{heqats}{jarra} = 11\ heqats$$

$$n = 6\ jarras$$

1	**1 2/3 1/6**
2	3 2/3
4	7 1/3

6	**11**

Por lo que el reparto de los 16 **heqats** es como sigue: 5 **heqats** de pan y 6 **heqats** de cada uno de los tipos de cervezas.

El **problema 13** del PMM es igual.

Problema 12 del PMM

Dispones de 13 heqats de grano del Alto Egipto para hacer 18 jarras de cerveza de malta y sabes que cada jarra de cerveza del Alto Egipto contiene 2 1/6 heqats de grano comparada con la cerveza de malta ¿Cuál es el pesu relativo?

En primer lugar divide el número de **heqats** entre la cantidad de **heqats** para una jarra de cerveza con grano del Alto Egipto.

$$13\ heqats.\frac{1\ jarra\ des\ 'del\ Alto\ Egipto'}{2+\frac{1}{6}\ heqats}=6\ jarras$$

1	**2 1/6**
2	4 1/3
4	8 2/3
6	**13**

Ahora calcularemos el **pesu** relativo siguiendo el procedimiento

$$Pesu\ (P)=\frac{jarras\ de\ cerveza}{heqats\ de\ grano}$$

$$Pesu\ de\ malta\ (P_m)=\frac{18\ jarras}{13\ heqats}$$

$$Pesu\ de\ cerveza\ del\ Alto\ Egipto\ (P_a)=\frac{6\ jarras}{13\ heqats}$$

Dividiendo miembro a miembro las dos ecuaciones obtenemos el **pesu** relativo.

$$\frac{P_m}{P_a}=\frac{18}{6}=3$$

Se fabrican 3 jarras de cerveza de malta por cada 1 de cerveza del Alto Egipto, teniendo en cuenta la equivalencia del ejercicio (se necesitan 2 1/6 **heqats** de grano para una jarra frente a 1 **heqat** de grano para una cerveza de malta).

Problema 16 del PMM

El desciframiento de los signos hieráticos y su transcripción a jeroglíficos es muy discutido, por lo que las propuestas para el enunciado del problema son diversas. Proponemos dos dependiendo de la lectura que hagamos de la línea 2 de la placa XXXII.

Dispones una jarra de cerveza de una medida de 2 2/3 y de 1 heqat de grano ¿Qué cantidad de grano sobrará tras elaborar una jarra de cerveza de malta de 2 pesu?

Para fabricar una jarra de cerveza corriente de 2 **pesu** necesitamos 1/2 **heqat**.

$$cantidad\ de\ grano = \frac{número\ de\ jarras}{pesu} = \frac{1}{2}$$

Como vimos en problemas anteriores la equivalencia de la cerveza de malta con la del Alto Egipto es 1 a 2, por lo que necesitaremos 1 **heqat** de grano para una jarra de cerveza del Alto Egipto (1/2 por 2). Como el volumen que nos da el problema es 2 2/3 la capacidad de una jarra "des", la cantidad de grano se calcula mediante una <u>proporcionalidad directa</u>. Si se requiere 1 **heqat** de grano para una capacidad 2 2/3, ¿cuánto grano se precisa para elaborar una jarra "des" (capacidad 1). Lo que se calcula dividiendo 1 entre 2 2/3.

1	**2 2/3**
1/2	1 1/3
1/4	1/2 1/6
1/8	1/4 1/12
1/4 1/8	**1**

Necesitamos 1/4 1/8 **heqats** para elaborar la cerveza.

Ahora resta 1 menos 1/4 1/8 resultando 1/8, el grano excedente (basándonos en la línea 2 de la placa XXXII – 1/4 1/8 para 1 se convierte en 1/8).

Tenemos que fabricar 3 jarras "des" de cerveza a partir de un recipiente de 2 2/3 de capacidad. ¿Qué cantidad de grano tendremos que añadir para que la cerveza tenga 2 pesu?

Como tenemos que fabricar 3 jarras y disponemos de un recipiente de 2 2/3 de capacidad, nos faltará 1/3 para completarlas. Conocemos que para elaborar una jarra necesitamos 1/4 1/8 **heqats**, por lo que para fabricar el tercio que falta se divide 1/4 1/8 entre 3.

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right):3=\frac{1}{8}\ heqat$$

La traducción aportada por Clagett (1999, pág. 222), apoyada en el texto de Struve (STRUVE, 1930) es diferente

"Ejemplo de cálculo de jarras 'des' de cerveza de 2 pefsu. Si se te dice: (Hay) jarras de cerveza de 2 'pefsu', como la cerveza de malta 1/2 1/4 (para hacer) 3 jarras de cerveza (fabricadas) con 3 heqat con una medida de 2 2/3. Calcula el grano requerido para (elaborar) una jarra de esta cerveza de 2 'pefsu'".

Problema 20 del PMM

Calcular la cantidad de grano de escandia que se necesita para la fabricación de 1000 panes de trigo de pesu 20 sabiendo que la relación entre los heqats del pan de trigo y los de escandia es 2 2/3.

El sistema que seguiríamos en la actualidad comenzaría calculando los **heqats** de trigo según la fórmula general

$$cantidad\ de\ heqats=\frac{número\ de\ panes}{pesu}=\frac{1000}{20}=50\ heqats$$

Aplicando la equivalencia

$$\frac{1\ heqat\ de\ escandia}{1\ heqats\ de\ trigo}=2+\frac{2}{3}$$

$$\frac{heqat\ de\ escandia}{50}=2+\frac{2}{3}$$

$$heqats\ de\ escandia=50\left(2+\frac{2}{3}\right)=133+\frac{1}{3}\ heqats$$

Pero el matemático no sigue la misma metodología. Si agrupamos el proceso anterior

$$heqats\ de\ escandia=\frac{número\ de\ panes}{pesu}equivalencia$$

El egipcio comienza dividiendo la equivalencia entre el **pesu** del trigo, calculando 1/5 de 2/3 (2/15) que multiplicado por el número de panes (1000) nos dará la respuesta al ejercicio, 133 1/3 **heqats**.

El problema continúa con la transformación de 1/3 en fracciones del críptico ojo de Horus, siguiendo la tabla de equivalencias entre **heqats** y **ro**.

1	**320 *ro***
1/2	160
1/3	106 2/3
1/4	80
1/8	40
1/16	20
1/32	10
1/64	5
1/4 1/16 1/64	**105**

Sabemos que 1/3 **heqats** son 106 2/3 **ro**, lo que corresponde, en fracciones del ojo de Horus, a 1/4 1/16 1/64 (80 + 20 + 5 = 105), faltando 1 2/3 **ro**.

El resultado del ejercicio es 133 1/4 1/16 1/64 **heqats** 1 2/3 **ro**.

Problema 22 del PMM

Se dispone de 10 heqats de grano para fabricar 100 panes de pesu desconocido y el resto del grano para elaborar 10 jarras de cerveza de 2 pesu como la cerveza de malta 1/2 1/4 ¿Qué cantidad de grano necesitamos de cada uno de ellos?

Comenzamos calculando los **heqats** de grano necesarios para la fabricación de las 10 jarras de cerveza de 2 **pesu**.

$$cantidad\ de\ heqats = \frac{número\ de\ jarras}{pesu} = \frac{10}{2} = 5\ heqats$$

Los **heqats** que quedan para los panes son 5 (10 menos 5).

Conocemos por problemas anteriores que el **pesu** de la cerveza fabricada con grano del Alto Egipto es la mitad del de la cerveza de malta. Para un mismo número de jarras de ambas cervezas, la cantidad de grano necesaria del grano del Alto Egipto es la mitad del grano de la cerveza de malta. La mitad de 5 es 2 1/2 **heqats**.

Problema 24 del PMM

Se dispone de 5 heqats de grano para fabricar 200 panes de y el resto del grano para elaborar 10 jarras de cerveza de pesu 1/10 del pesu del pan como la cerveza de malta 1/2 1/4 ¿Cuál es el pesu del grano y de la cerveza?

Comenzamos calculando los **heqats** de grano necesarios para la fabricación de las 10 jarras de cerveza de 2 **pesu**.

La cantidad total de grano es

$$heqats\ de\ grano = \frac{jarras\ de\ cerveza}{\frac{Pesu\ del\ pan}{10}} + \frac{panes}{Pesu\ del\ pan}$$

$$15 = \frac{100}{x} + \frac{200}{x} = \frac{1}{x}(100 + 200)$$

El **pesu** del pan es 20 y el de la cerveza 2.

El procedimiento del escriba es muy semejante. Comienza calculando el inverso

$$\frac{jarras\ de\ cerveza}{\frac{Pesu\ del\ pan}{10}} = \frac{1}{\frac{Pesu\ del\ pan}{10}} . jarras\ de\ cerveza$$

... dividiendo 1 entre 1/10 obteniendo 10, valor que multiplica por el número de jarras, 10, resultando 100.

Suma el valor obtenido, 100, con el número de panes, 200, totalizando 300 (como nuestro paréntesis). Para calcular el **pesu** del pan basta con dividir 300 entre 15, resultando 20, el **pesu** del pan. Como el de la cerveza es 1/10, es suficiente con dividir 20 entre 10 para obtener el **pesu** de la cerveza.

Repartos proporcionales

La asignación de salarios diferentes para el desarrollo de funciones distintas fue habitual en el Egipto faraónico como nos demuestra el ostracon de El Cairo (JE 51518) que determina las raciones de trigo que deben repartirse a distintos tipos de trabajadores de la necrópolis de Deir el-Medina según su cargo. En términos comparativos, la atribución menor es recibida por el *swnw* (médico-físico) como 1, los jefes de los trabajadores y los escribas cobrarían como 6, los trabajadores como 4 1/2, los guardianes como 3 1/2, las sirvientas como 2, los aprendices como 1 1/2 y los porteros como 1 1/4.

Llama la atención el bajo salario de los *swnw*, pero es posible que esta asignación se añadiera a algún otro cargo que desempeñara en la cantera.

El PMR no podía prescindir del cálculo de estos emolumentos y utiliza el reparto proporcional directo para ello.

Problema 63 del PMR

Se deben repartir 700 panes entre cuatro hombres dando al primero directamente proporcional a 2/3, al segundo a 1/2, (al tercero a 1/3 y al cuarto a 1/4)[1]. ¿Qué cantidad le corresponde a cada uno de ellos?

El procedimiento utilizado por el escriba es el mismo que el actual. Lo comprobamos en el ejercicio. El matemático suma las distintas cantidades de proporción.

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

Calcula el inverso de este valor dividiendo 1 entre 1 1/2 1/4, obteniendo 1/2 1/14

1 **1 1/2 1/4**

1/2	1/2 1/4 1/8
1/7	1/7 1/14 1/28
1/14	1/14 1/28 1/56
1/2 1/14	**1**

El valor de la suma se obtiene tomando como base m = 56.

1	**56**
1/2	28
1/4	14
1/8	7
1/7	8
1/14	4
1/28	2
1/56	1
1/2 1/4 1/8 1/14 1/28 1/56	**56**

El siguiente paso es multiplicar el valor del inverso por el número de panes a repartir, 700, para conseguir la razón.

1	**700**
1/2	350
1/7	100
1/14	50
1/2 1/14	**400**

Basta con multiplicar la razón obtenida por cada uno de los valores proporcionales.

2/3 de 400	**266 2/3**
1/2 de 400	200
1/3 de 400	133 1/3[2]
1/4 de 400	100
	700

Problema 65 del PMR

Se deben repartir 100 panes entre 10 hombres de forma que tres ellos, un barquero, un capataz y un guardián, cobren doble que el resto. ¿Cuál es el reparto para cada uno de ellos?

El escriba suma 2 + 2 + 2 (los tres hombres que cobran doble) + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 (los otros 7 hombres) = 13. Divide el número de panes, 100, entre 13, para calcular la razón.

1	**13**
2	26
4	52
1/3	4 1/3
2/3	8 2/3
1/13	1

1/39	1/3
7 2/3 1/39	**100**

Es lo que deben recibir los trabajadores menos cualificados. Los otros 3 recibirán el doble, 15 1/3 1/26 1/78 (2/39 en la tabla 2/n del papiro).

Problema 68 del PMR

Si un escriba te dice que 4 grupos de trabajadores reciben 100 heqats de grano. El primero compuesto de 12 hombres, el segundo de 8, el tercero de 6 y el cuarto de 4. ¿Cuánto debe recibir cada grupo de hombres?

Otro claro ejemplo de reparto proporcional directo.

El matemático sigue el procedimiento habitual. Suma el número de trabajadores de los grupos de trabajo, obteniendo 30 (12 + 8 + 6 + 4). Valor que divide por los 100 **heqats**, resultando 3 1/3, que transforma en las fracciones del ojo de Horus siguiendo la tabla.

1	**320**
1/2	160
1/3	106 2/3
1/4	80
1/8	40
1/16	20
1/32	10
1/64	5
1/4 1/16 1/64	**105**

Faltan 1 2/3 **ro** para alcanzar el valor correspondiente a 1/3 (fila verde).

Lo que debe recibir cada trabajador es 3 1/4 1/16 1/64 **heqats** 1 2/3 **ro**.

Basta con multiplicar esta cantidad por el número de hombres que forman cada grupo para conocer el reparto.

1	**3 1/4 1/16 1/64 *heqat* 1 2/3 *ro***
2	6 1/2 1/8 1/32 *heqat* 3 1/3 *ro*
4	13 1/4 1/16 1/64 *heqat* 1 2/3 *ro*
8	26 1/2 1/8 1/32 *heqat* 3 1/3 *ro*
12	40 *heqats*
8	26 1/2 1/8 1/32 *heqats* 3 1/2 *ro*
6	20 *heqats*
4	13 1/4 1/16 1/64 *heqat* 1 2/3 *ro*

El matemático transforma en centenas de **heqat** los dos primeros resultados dividiendo por 100.

12	1/4 *centenas* 15 *heqats*
8	1/4 *centenas* 1 1/2 1/8 1/32 *heqats* 3 1/2 *ro*
6	20 *heqats*
4	13 1/4 1/16 1/64 *heqat* 1 2/3 *ro*

Incluimos aquí el problema 39 en el que se calcula una diferencia en el reparto de panes.

Problema 39 del PMM

Dispones de 100 panes que debes repartir del siguiente modo: 50 para 6 hombres y 50 para 4 ¿Cuál es la diferencia entre ambos grupos?

Primero calcula el número de panes que le corresponde a un homrbe de cada grupo. Divide 50 entre 4.

1	**4**
10	40
2	8
1/2	2
12 1/2	**50**

Cada hombre del grupo de 4 recibe 12 panes y medio.

Ahora divide 50 entre 6.

1	**6**
2	12
4	24
8	48
1/3	2
8 1/3	**50**

Cada hombre del grupo de 6 recibe 8 panes y 1/3.

Ahora resta ambos resultados, obteniendo

$$\left(12+\frac{1}{2}\right)-\left(8+\frac{1}{3}\right)=4+\frac{1}{6}$$

... que es el exceso.

Un problema de regla de aligación

La regla de **aligación** se define como **aquella que enseña a calcular el promedio de varios números, atendiendo a la proporción en que cada uno entra a formar un todo, empleada principalmente para averiguar el precio que corresponde a una mezcla de varias especies cuyos precios respectivos se conocen.**

Matemáticamente se puede expresar como

$$cantidad1\ x\ valor1 + cantidad2\ x\ valor2 = cantidad\ total\ x\ valor\ promedio$$

Problema 21 del PMM

Aportas 20 ofrendas con un valor de 1/8 de heqat y 40 ofrendas con un valor de 1/16 de heqat ¿Cuál es el valor total en heqats?

Expresamos en un cuadro los datos del ejercicio.

20 ofrendas	1/8 de *heqat*	2 1/2 *heqats*
40 ofrendas	1/16 de *heqat*	2 1/2 *heqats*
60 ofrendas		**5 *heqats***

Aplicamos la fórmula propuesta.

El primer miembro está calculado en la tabla, 5 **heqats**.

Despejando el 'valor promedio'

$$valor\ promedio = \frac{5\ heqats}{cantidad\ total} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12^3}\ heqats$$

La proporcionalidad en la cámara real de la pirámide de Khufu (Keops)

En la proporcionalidad directa dos magnitudes se relacionan entre sí por su cociente que se llama **razón de proporcionalidad**.

$$r = \frac{a}{b}$$

Cuando la relación se estable entre superficies, el valor de la razón eleva al cuadrado.

$$r^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$$

En el caso de que se tratara de volúmenes se elevaría al cubo.

La cámara real de la pirámide de Khufu (Keops) está construida a un nivel del suelo en el que un plano paralelo a la base cortaría una superficie (b^2) que es la mitad del área de la base (B^2). Esto da pie a pensar en la posibilidad de que los matemáticos del país del Nilo conocieran perfectamente esta relación.

Al estudiar la relación matemática entre las áreas en la Gran pirámide observamos

$$r^2 = \frac{B^2}{b^2} = \frac{2b^2}{b^2} = 2$$

$$r = \sqrt{2}$$

... lo que indica que el lado de la base de la pirámide es $\sqrt{2}$ veces el que correspondería a la base en la que se encuentra la cámara funeraria del rey, el mismo valor que se obtiene al calcular la relación de la diagonal (d) de dicha superficie con respecto a su lado (l).

Siguiendo el teorema de Pitágoras

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$$

$$d = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$$

$$\frac{d}{l} = \frac{l\sqrt{2}}{l} = \sqrt{2}$$

[1] El paréntesis está destruido en el papiro, pero puede deducirse del contexto.
[2] En el papiro se lee 133.
[3] El manuscrito contiene un error del escriba. Se ha escrito 1/16 en vez de 1/12.

Progresiones

Definimos con este nombre aquellas series matemáticas en las que un término se relaciona con el siguiente sumando / restando un número fijo que llamamos **diferencia** (progresiones aritméticas) o multiplicando / dividiendo por un número fijo, al que denominamos **razón** (progresiones geométricas).

Encontramos ejercicios con progresiones en al menos dos manuscritos matemáticos: el PK y el PMR.

Progresiones aritméticas

Para comprender el trabajo con estas progresiones es necesario recordar algunas cosas. Se llama primer término al que inicia la progresión (a_1); último término al que la finaliza (a_n); el número de términos de la misma se representa por n; y la diferencia entre dos términos consecutivos, la diferencia, la llamaremos d.

También es imprescindible conocer las fórmulas matemáticas que los interrelacionan.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S\ (suma\ de\ los\ n\ términos) = \frac{a_1 + a_n}{2}.n$$

Veamos hasta dónde llegó la sabiduría egipcia en estos casos.

Problema 40 del PMR

Hay que repartir 100 panes entre 5 hombres en progresión aritmética de forma que la suma de las dos cantidades más bajas sea la séptima parte de la suma de las tres mayores. ¿Cuál es la diferencia? ¿Cuál es la cantidad que recibe cada hombre?

Se hace como sigue asumiendo que hay una diferencia de 5

1/2.

Lo primero que tenemos que plantearnos es cómo llega el matemático egipcio al valor 5 1/2 para la diferencia ($d = 5\ 1/2$).

Si expresamos matemáticamente los cinco términos de una progresión aritmética podemos escribir: $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d\ y\ a_1 + 4d$.

Asumiendo que el primer término valiera 1 la progresión anterior quedaría: $1, 1 + d, 1 + 2d, 1 + 3d, 1 + 4d$.

Aplicamos los datos del ejercicio. Que **la suma de las dos cantidades más bajas sea la séptima parte de la tres más altas.**

$$1 + 1 + d = 2 + d$$

$$1 + 2d + 1 + 3d + 1 + 4d = 3 + 9d$$

Siete veces la suma de los dos primeros es la suma de los tres últimos.

$$7(2 + d) = 3 + 9d$$

$$14 + 7d = 3 + 9d$$

$$11 = 2d$$

$$d = 5 + \frac{1}{2}$$

La diferencia asumida por el escriba. El método desarrollado por él no lo conocemos en la actualidad, pero el mecanismo para llegar a él no es demasiado sencillo. Se ha propuesto que conociendo que la serie consta de 5 términos, el amanuense probaría varias series hasta dar conla diferencia.Veamos la tabla que tuvo que realizar el escriba siendo 'a' la suma de los tres términos mayores (observad que la suma sigue una progresión aritmética cuyo primer término es 12 y la diferencia 9) y 'b' la de los dos inferiores (sigue una progresión aritmética cuyo primer término es 3 y la diferencia 1).

Progresión	Diferencia	a/7	b	Balance
1,2,3,4,5	1	12/7	3	-9/7
1,3,5,7,9	2	21/7	4	-7/7
1,4,7,10,13	3	30/7	5	-5/7
1,5,9,13,17	4	39/7	6	-3/7
1,6,11,16,21	5	48/7	7	-1/7
1,6 1/2,12,17 1/2,23	5 1/2	(52 1/2)/7	7 1/2	0
1,7,13,19,25	6	57/7	8	1/7

Observad que el balance es otra progresión aritmética que tiene como primer término -9/7 y cuya diferencia es -2/7.

Un procedimiento alternativo ha sido expuesto por Robins (1987, págs. 42-43). Considera que **el término central de una progresión aritmética es igual a la suma dividida por el número de términos**.

$$S\ (suma\ de\ los\ n\ términos) = \frac{a_1 + a_n}{2}.n = \frac{a_m - 2d + a_m + 2d}{2}.n$$

$$S\ (suma\ de\ los\ n\ términos) = a_m.n$$

$$a_m = \frac{S\ (suma\ de\ los\ n\ términos)}{n} = \frac{60}{5} = 12$$

La diferencia se conseguiría, aplicando la definición de progresión aritmética, **restando el último término del central y dividiendido por 2**. Lo aplica a una progresión decreciente, por lo que el último término es 1.

$$a_m = a_n + 2d$$

$$d = \frac{a_m - a_n}{2} = \frac{12 - 1}{2} = 5 + \frac{1}{2}$$

Esta hipótesis presupone que la suma de los 5 términos es 60, dato que no aparece en el ejercicio hasta que se suman todos los términos de la primera progresión.

Para obtener la progresión el matemático se basa en la definición de progresión aritmética y suma la diferencia a cada uno de los términos para calcular el siguiente asumiendo que el primero vale 1. Y obtiene

$$1, 6\frac{1}{2}, 12, 17\frac{1}{2}, 23$$

La suma es 60. Aplicando el método de la **falsa posición**

$$\frac{término\ buscado\ (x)}{término\ asignado\ (1)} = \frac{suma\ real\ \ (100)}{suma\ asignada\ (60)}$$

... obtenemos la razón por la que multiplicando los términos de la progresión asignada nos dará los términos de la progresión real. Al dividir 100 entre 60 conseguimos

1	**60**
2/3	40
1 2/3	**100**

... la razón: 1 2/3.

Basta con multiplicar este valor por cada uno de los términos de la progresión asignada para obtener la que solicita el problema.

1	**1 2/3**
6 1/2	**10 2/3 1/6**
12	**20**
17 1/2	**29 1/6**
23	**38 1/3**
60	**100**

La nueva serie es

$$1+\frac{2}{3}, 10+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}, 20{,}29+\frac{1}{6}, 38+\frac{1}{3}$$

La diferencia se obtiene con facilidad restando dos términos consecutivos. Lo más sencillo es restar el cuarto y el tercer término.

$$\left(29+\frac{1}{6}\right)-20=9+\frac{1}{6}$$

Problema 64 del PMR

Hay que repartir 10 heqats entre 10 hombres en progresión aritmética con una diferencia de 1/8 entre ellos. ¿Cuál es la cantidad que recibe cada hombre?

El matemático egipcio aplica una propiedad de las progresiones aritméticas según la que **el cociente de la suma de la progresión entre el número de elementos (valor promedio) es igual al último término más la mitad de la diferencia multiplicada por el número de términos menos uno (n- 1).**

Conocemos

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_1 = a_n - (n-1)$$

... que sustituidos en la fórmula de la suma de los 'n' términos

$$\frac{Suma\ de\ la\ progresión}{Número\ \ de\ elementos} = \frac{a_1+a_n}{2n}.n = \frac{a_n-(n-1)d+a_n}{2} =$$

$$= \frac{2a_n-(n-1)d}{2} = a_n-(n-1)\frac{d}{2}$$

Despejando podemos escribir que

$$a_n = \frac{S_n}{n} + (n-1)\frac{d}{2}$$

El escriba calcula el valor promedio dividiendo 10 **heqats** entre 10 hombres, obteniendo como resultado 1.

$$1 = a_n - (n-1)\frac{d}{2}$$

Sigue restando el número de elementos (10 hombres) menos 1 (n – 1), obteniendo 9.

$$1 = a_{10} - 9\frac{d}{2}$$

Halla la mitad de la diferencia

$$\frac{1}{8} : 2 = \frac{1}{16}$$

... que multiplica por 9.

$$1 = a_{10} - \frac{9}{16}$$

... valor que expresa como suma de una serie de fracciones de numerador unitario realizando la división.

1	**16**
1/2	8
1/4	4
1/8	2
1/16	1
1/2 1/16	**9**

$$1 = a_{10} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{16}\right)$$

Ahora suma el valor obtenido para calcular el último término

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$$

A partir de ahí solamente hay que restar 1/8 a cada término para conseguir el anterior.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}, 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}, 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}, 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}, 1 + \frac{1}{16},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}, \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}, \frac{1}{2} + \frac{1}{16},$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$$

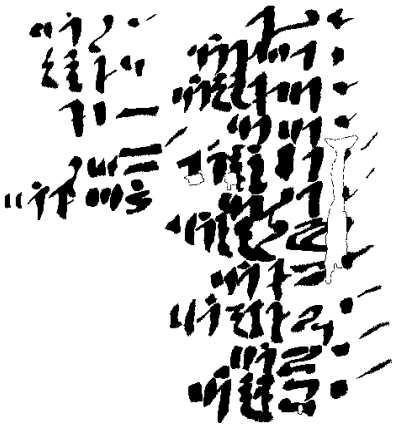
En total 10 **heqats**.

Problema 1 del PK

El problema ocupa las columnas 11 y 12 del papiro IV.3 de Kahun. Es un ejercicio cuyo enunciado permanece a debate. En este trabajo seguiremos el propuesto por Sylvia Couchoud (1993, págs. 163-ss).

Si la suma de los 10 primeros términos de una progresión aritmética es 100 y su diferencia 2/3 1/6, halla los términos de la progresión.

Col. 11 Col. 12



En la columna 11 encontramos las relaciones con la mitad del valor de la diferencia.

1	**1/3 1/12**
2	**2/3 1/6**
4	1 2/3
8	3 1/3
9	**3 2/3 1/12**

Para la resolución del ejercicio basta con aplicar la fórmula utilizada en el problema 64 del PMR.

$$a_n=\frac{S_n}{n}+(n-1)\frac{d}{2}$$

$$a_{10}=\frac{100}{10}+(10-1)\frac{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)}{2}=13+\frac{2}{3}+\frac{1}{12}$$

A partir de este dato basta simplemente con restar la diferencia a cada término para calcular el valor del término anterior, lo que se muestra en la columna 12.

13 2/3 1/12
12 2/3 1/6 1/12
12 1/12
11 1/6 1/12
10 1/3 1/12
9 1/3 1/6 1/12
8 2/3 1/12
7 2/3 1/6 1/12
7 1/12
6 1/6 1/12
100

Sobre el enunciado de este problema no hay unanimidad. Gillings (1966, pág. 126) presentó una primera teoría según la cual el enunciado se podría expresar como **Disponemos de una progresión aritmética de 17 términos, cuya diferencia es el doble del término menor y la suma de los 12 últimos términos es 110 ¿Cuál es la serie?**

El ejercicio expuesto así es demasiado complejo. Además, el escriba no muestra, o por lo menos no nos ha llegado la serie correspondiente de 17 términos.

Estudiaremos el procedimiento. La diferencia es el doble del primer término

$$d = 2a_1$$

... y la suma de los 12 últimos términos es

$$S_{12} = \frac{a_6 + a_{17}}{2} 12$$

... como

$$a_6 = a_1 + 5d$$

$$a_{17} = a_1 + 16d$$

... sumando

$$a_6 + a_{17} = 2a_1 + 21d = 2a_1 + 42a_1 = 44a_1$$

Aplicamos los datos obtenidos a la fórmula de la suma

$$110 = \frac{44a_1}{2}12$$

$$a_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

$$d = 2a_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$$

Así los primeros términos de la progresión son

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{12}, 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}, 2 + \frac{1}{12}, 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}, 3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12},$$

$$4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}, 5 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

El resto de los términos se encuentran en la columna 12 del manuscrito escritos de abajo hacia arriba.

Más tarde, el mismo autor propone una modificación del enunciado (GILLINGS , 1967) quedando como **la suma de los 12 términos de una progresión aritmética es 110 y su diferencia es 1/2 1/3 ¿Cuál es la serie?** que mantiene en su trabajo posterior (1967, pág. 61) intentando explicar el 110 que encabeza la columna 12.

Esta fila, como sugiere Couchoud (1993, pág. 164) se debe descomponer en dos números, 100 (valor de la suma) y 10 (número de elementos de la progresión).

La suma de los dos primeros elementos de la serie de 12 propuesta por Gillings suman 10.

$$\left(5 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) + \left(4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right) = 10$$

Interesante es la observación de Gillings según la que los términos que se muestran en la columna 12 del PK están relacionados con el número 12. De hecho esta progresión se corresponde con la de los números impares multiplicados por 5/12.

impares	factor	columna 12 ampliada
33	5/12	13 2/3 1/12
31	5/12	12 2/3 1/6 1/12
29	5/12	12 1/12
27	5/12	11 1/6 1/12
25	5/12	10 1/3 1/12
23	5/12	9 1/3 1/6 1/12
21	5/12	8 2/3 1/12

19	5/12	7 2/3 1/6 1/12
17	5/12	7 1/12
15	5/12	6 1/6 1/12
13	5/12	5 1/3 1/12
11	5/12	4 1/2 1/12
9	5/12	3 2/3 1/12
7	5/12	2 2/3 1/6 1/12
5	5/12	2 1/12
3	5/12	1 1/6 1/12
1	5/12	1/3 1/12

Las celdas resaltadas no se muestran en la columna 12 del papiro.

La diferencia de la serie de números impares es 2 que multiplicada por 5/12 nos da el valor de la diferencia de la progresión del problema, 2/3 1/6.

Progresiones geométricas

Son secuencias de números en las que cada uno de sus elementos se obtiene al multiplicar el anterior por un número constante, llamado **razón**.

Las fórmulas que los relacionan son

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Cualquier elemento de la progresión se obtiene multiplicando el primero de ellos por la **razón** elevada al número de elementos menos 1. Es en realidad una expresión de la definición.

$$Suma = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

La suma de los términos de la progresión geométrica es el cociente entre el primer término multiplicado por la **razón** elevada al número de términos restada de 1 entre la **razón** menos 1.

Una variante de esta, cuando el número de términos tiende a infinito y la **razón** es menor que la unidad la vimos al estudiar las fracciones que generaban el ojo de Horus en el capítulo dedicado a los números racionales.

Problema 79 del PMR

Calcula la suma de los cinco primeros términos de una progresión geométrica diveregente, cuyo primer término y la razón son 7.

El problema se enuncia como "**tenemos 7 casas, en cada casa hay 7 gatos, cada gato mata 7 ratones, cada ratón se come 7 sacos de cebada y cada saco de cebada contiene 7 kilos ¿Cuál es la suma de todas las cosas enumeradas?**".

wʿt jmyt-pr	
prw	7
mjww	49
pnww	343
btyw	2.401
ḥqꜣṯ	16.807
dmḏ	19.607

... muy semejante a una coplilla inglesa que reza

As I was going to St. Ives,
I met a man with seven wives;
Every wife had seven sacks,
Every sack had seven cats,
Every cat had seven kits.
Kits, cats, sacks, and wives,
How many were going to St. Ives?

... o a la coplilla latina publicada por Fibonacci en su Liber Abaci

[1] El manuscrito muestra 2.301.

Septem vetulae vadunt Romam;
quarum quaelibet habet burdones 7;
et in quolibet burdone sunt sacculi 7;
et in quolibet sacculo panes 7;
et quilibet panis habet cultellos 7;
et quilibet cultellus habet vaginas 7.
Quaeritur summa omnium praedictorum[4].

Los términos de esta progresión geométrica son

$$7, 49, 343, 2.401, 16.807$$

... las cinco primeras potencias de 7.

Para resolver el problema en nuestras escuelas aplicaríamos la fórmula

$$Suma = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{7(7^5 - 1)}{7 - 1} = 19.607$$

Veamos la metodología utilizada por el matemático egipcio en el PMR. Es probable que el escriba asumiera que el primer elemento de la progresión fuera 1, construyendo la serie

$$1, 7, 49, 343, 2.401$$

... que posteriormente sumaría, para luego multiplicarla por 7, la proporción entre la serie ficticia y la propuesta en el ejercicio (7 entre 1). Pero si analizamos detalladamente la suma de los cinco primeros términos de una progresión geométrica aplicando su definición obtenemos

$$Suma = a_1 + a_1.r + a_1.r^2 + a_1.r^3 + a_1.r^4 =$$

$$= a_1(1 + r + r^2 + r^3 + r^4)$$

$$(1 + 7 + 49 + 343 + 2.401) = 2.801$$

Considerando que el primer elemento (a_1) es 7, bastaría con multiplicar 2801 por 7 para alcanzar el montante de la suma.

1	**2801**
2	5602
4	11204
7	**19607**

Se comprueba en el PMR sumando los términos de la serie donde hay un error de transcripción. En el manuscrito se lee 2.301

cuando debería poner 2.401, pero el resultado de la suma es correcto, 19.607.

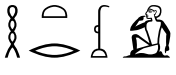
[4] Siete ancianos van a Roma. Cada uno tiene 7 mulas, cada mula tiene 7 sacos, en cada saco hay 7 panes, en cada pan hay 7 cuchillos y cada cuchillo tiene 7 dientes. ¿Cuál es la suma de todo lo anteriormente nombrado?

La administración de una granja

Cuatro de los últimos textos del PMR, los números del 82-84, inscritos en el verso del manuscrito BM 10058 parecen relacionados con la alimentación de aves y ganados. El primero de ellos, el 82, no parece muy claroen su enunciado donde se combina la alimentación de aves con cantidades de cereal.

Problema 82 del PMR

Según los autores clásicso el problema parece estar relacionado con el cálculo de la cantidad de grano necesaria para alimentar a un grupo de 10 gansos cebados, pero los datos expuestos son complejos.

El texto comienza con la palabra *ḥtr*  que tiene como significado básico "tasar, reclutar", "tasa, reclutamiento", pero que puede traducirse como "suministrar" a un templo con trabajadores (Urk IV 1669,1) (FAULKNER, A Concise Dictionary of Middle Egyptian, 1988, pág. 181), quizá el valor que debamos darle en este texto, aunque, por lo general, se ha admitido la traducción "estimar" una cantidad (CHACE, 1927, pág. 115) (CLAGETT, 1999, pág. 181).

Desarrollemos el ejercicio línea a línea.

(1) Suministro de las provisiones de una granja (2) hecha en panes de lo que corresponde a un día de la harina (3) de un ganso cebado.

(2) (Si) 10 aves comen 2 1/2 (heqats) de harina (diariamente) (¿Cúanto) comerán en 40 días?

El egipcio multiplica 2 1/2 por 10, obteniendo 25 heqats (1/4 de 100 heqats), y posteriormente los multiplica por 4, concluyendo

que las aves comerán 100 heqats (1 de 100 heqats) durante los 40 días.

A partir de aquí se muestran una serie de datos que no son fácilmente asignables.

(6) Lo que se puede moler de harina "bedet" 1 1/2 (de 100 heqats) 16 1/2 1/8 1/32 heqats y 3 1/3 ro.

Siguiendo la tabla de equivalencias entre heqats y ro obtenemos

$$100 + 50 + 16 + \frac{160 + 40 + 10 + 3 + \frac{1}{3}}{320} heqats$$

... lo que resulta 166 2/3 heqats. Posiblemente el suministro de la granja.

(7) El trigo es 1/3 1/4 (de 100 heqats) 8 1/4 1/16 1/64 heqats y 1 2/3 ro.

Siguiendo el mismo procedimiento anterior llegamos a

$$33 + \frac{1}{3} + 25 + 8 + \frac{80 + 20 + 5 + 1 + \frac{2}{3}}{320} heqats$$

... lo que resulta 66 2/3 heqats. Observamos que es la cantidad del suministro menos 100 heqats, el alimento de las aves.

(8) De esta cantidad se sustrae su décima parte.

El 1/10 del valor anterior es

$$6 + \frac{160 + 40 + 10 + 1 + \frac{2}{3}}{320} heqats$$

... lo que se corresponde con 6 2/3 heqats, cantidad que restada de los 100 heqtas resultando 93 1/3 heqats.

A partir de este dato aparecen algunos errores de copia. Algunos autores (CHACE, 1927, pág. 115) (CLAGETT, 1999, pág. 182) consideran que el manuscrito muestra como diferencia 83 1/3.

$$50 + 25 + 8 + \frac{80 + 20 + 5 + 1 + \frac{2}{3}}{320} heqats$$

... mientras que Griffith (1892, pág. 428) añade 10 a la suma anterior para obtener el valor real.

$$50 + 10 + 25 + 8 + \frac{80 + 20 + 5 + 1 + \frac{2}{3}}{320} heqats$$

(11) Se calcula el grano en dobles heqats.

El manuscrito lo realiza sobre el valor escrito 83 1/3,

$$25 + 21 + \frac{160 + 40 + 10 + 3 + \frac{1}{3}}{320} heqats$$

... obteniendo 46 2/3 **cuádruples heqats**, valor que corrige Griffith en 47 2/3, la cantidad "que deberá ser molida".

De una visión completa del ejercicio surgen múltiples dudas que, al parecer, no se aclaran. ¿Cuál es el enunciado?¿Por qué los valores de la harina y del trigo?¿Qué significado tiene la sustracción de 1/10? Es posible que 1/10 sea la parte alicuota de un alimento supletorio para completar la dieta que no se administre en forma de grano. Con todo, no hemos sido capaces de dar una respuesta convincente a los interrogantes.

Problema 82B del PMR

Este ejercicio, continuación del anterior, sugiere **¿cuál será la cantidad de grano necesaria para alimentar 10 gansos cebados durante 40 días, si cada ave consume 1 1/4 heqats por día?**, la mitad del ejercicio anterior.

Primero calcula la cantidad de grano para 10 días, 12 1/2 heqats. Multiplicando por 4 llega a 50 (1/2 de 100 heqats).

Conciendo los datos del ejercicio anterior basta una simple proporción para llegar al resultado.

$$\frac{100\ heqats}{50\ heqats} = \frac{46 + \frac{2}{3}}{x}$$

De donde resulta 23 1/3 heqats, que pasado a fracciones del ojo de Horus se concreta en 23 1/4 1/16 1/64 heqats y 1 2/3 ro.

Observad que los cálculos se realizan con los datos erróneos del problema anterior. En realidad, y considerando que el resultado

efectivo para 100 heqats es de 47 2/3 heqats, el grano que deberá molerse para los 50 heqats de alimento será 23 1/2 1/4 1/16 1/64 heqats 1 2/3 ro.

Problema 83 del PMR

Si el alimento para 4 patos encerrados es de 1 hin (32 ro) **de cebada del bajo Egipto, a cada uno de los patos le corresponde 1/64 heqats y 3 ro al día. Pero si los patos entran en el estanque necesitan 1/16 1/32 heqats y 2 ro, cada uno necesitará 1 hin de cebada del bajo Egipto. ¿Cuánto grano se requiere para alimentar 10 patos un mes en el estanque?**

Mediante proporciones llega al resultado con facilidad conociendo que 1 hin son 32 ro (1/10 de heqat).

$$\frac{1\ ave}{10\ aves} = \frac{32\ ro}{x}$$

... 320 ro, que equivalen a 1 heqat.

Para 10 días, 10 heqat. para un mes de 30 días, 30 heqats o su equivalente 1/4 de 100 heqats y 5 heqats.

Ahora se lista una tabla con la cantidad de alimento que necesitan diferentes tipos de ave (PEET, 1923, pág. 126) para cada día.

Ave	cantidad de alimento
ganso cebado	1/8 1/32 heqats 3 1/3 ro
ganso 'tjerep'	1/8 1/32 heqats 3 1/3 ro
grulla	1/8 1/32 heqats 3 1/3 ro
cerceta	1/32 1/64 heqats 1 ro
pato 'set'	1/64 heqats 3 ro
paloma	[1/64] heqats 3 ro
codorniz	[1/64] heqats 3 ro

Problema 84 del PMR

Este ejercicio se muestra en tres columnas: la primera identifica los animales del establo y las segunda y la tercera dos tipos de alimentos, con necesidades diferentes para su elaboración: el primero 9 heqats de trigo para elaborar 86 heqats de alimento y el segundo 7 1/2 heqats de trigo para elaborar 10 heqats de alimento.

La lista es

	alimento 1	alimento 2
Lo que comen 4 hermosos bueyes del alto Egipto	24 heqats	2 heqats
Lo que comen 2 hermosos bueyes del alto Egipto	22 heqats	6 heqats
Lo que comen 3 toros comunes	20 heqats	2 heqats
Lo que come 1 toro	20 heqats	
Total del alimento en trigo	86 heqats	10 heqats
Alimento para 10 días	1/2 1/4 de 100 heqats + 15 heqats	1/2 1/4 de 100 heqats
Alimento para 1 mes	2 1/2 de 100 heqats + 20 heqats	2 1/4 de 100 heqats
En dobles heqats	1 1/4 de 100 dobles heqats + 10 dobles	1 1/8 de 100 dobles heqats

En el PMR las filas correspondientes a el alimento por mes y su cálculo en dobles heqats no presenta los mismos valores.

Alimento para 1 mes	200	1/2 1/4 de 100 heqats + 15 heqats
En dobles heqats	1/2 de 100 dobles heqats + 11 1/2 1/8 dobles heqats 3 ro	1 1/4 de 100 dobles heqats + 5 dobles

Además la última fila, la correspondiente a los dobles heqats tampoco es la mitad de la fila anterior. Más que un error de cálculo parece tratarse de un fallo en la copia.

Si observamos los datos de la última columna de la tabla precedente se puede apreciar que se trata de **triples heqats**, lo que no es concordante con la segunda columna, ya que 1/3 de 200 es 66 2/3, lo que en terminología de las fracciones del ojo de Horus resulta 1/2 de 100 triples heqats + 16 triples heqats + 1/2 1/8 1/32 y 3 ro.

El problema surge al no existir en a bibliografía traza alguna de los triples heqats.

Cálculo de áreas

El desarrollo de la **Geometría** estuvo, sin duda, relacionado con el reparto de parcelas[5], la restauración de las lindes de los campos de cultivo tras las inundaciones periódicas del Nilo y las diversas construcciones del país de las Dos Tierras que hicieron necesario el conocimiento de las áreas de figuras planas ya sean poligonales (triángulos, cuadrados, rectángulos, trapecios,...) o circulares (círculos y elipses).

Las tierras, sobre todo en los primeros periodos dinásticos, eran propiedad del rey, dueño absoluto de Egipto, quien en determinados momentos de la historia como recompensa por las labores realizadas, las distribuyó entre sus súbditos.

"Un rey egipcio (con referencia a Sesostris, lo que no parece coincidir con los hechos históricos) repartió el suelo entre todos los egipcios, concediendo a cada habitante un lote cuadrangular de extensión uniforme; y, con arreglo a esta distribución fijó sus ingresos, al imponer el pago de un tributo anual" (HERÓDOTO, 1992, págs. 109,1).

También se conocen casos de adquisición de tierras, no se sabe si a un particular o al monarca, por un noble que vivió en la III dinastía, Metjen, que ejerció su influencia sobre gran parte de los nomos del delta.

"Ha adquirido mediante pago un campo de 200 aruras que poseía numerosos colonos del rey" (biografía de Metjen).

Es importante hacer notar que los matemáticos egipcios no aplicaban fórmulas matemáticas para la resolución de los ejrecicios de los diferentes papiros, simplemente los solucionaban. Esta afirmación ha llevado a estudiosos del tema a afirmar que los egipcios carecían de una actitud mental científica (Gillings, 1975), que eran capaces de solucionar problemas matemáticos, pero no de

profundizar en el campo de la ciencia matemática propiamente dicha.

Cálculo del área de un círculo

En el lenguaje coloquial, no matemático, un recinto circular cerrado recibe el nombre de *šnw* (Urk IV 184,16), palabra utilizada también para designar los cartuchos reales, , óvalos donde se inscrubieron los nombres tercero (rey del alto y bajo Egipto) y cuarto (hijo de Ra) de la titulatura real, mientras que circunferencia, generalmente apliacado a aquello que rodea el disco solar se escribió *šnwt* (Estela de Gebel Barkal 14).

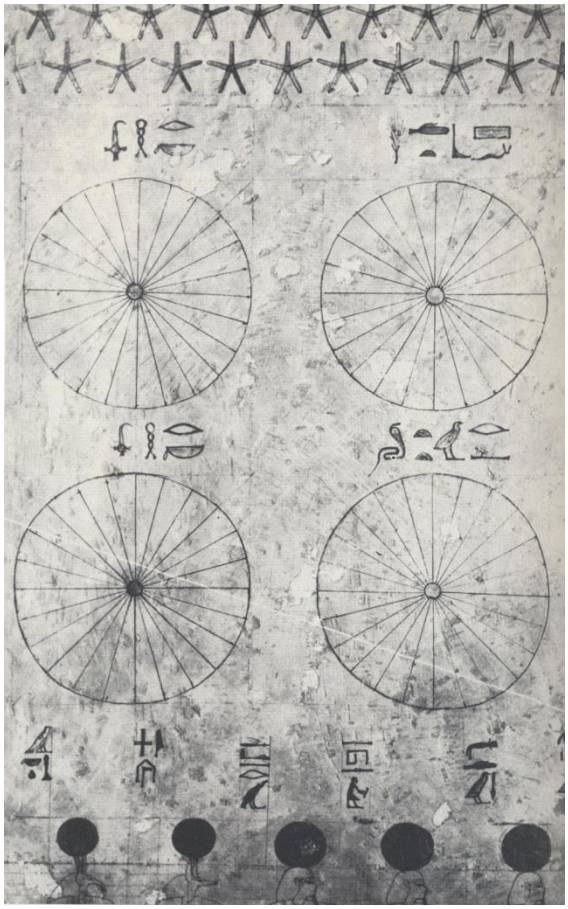


Ilustración 2. Círculos horarios de la tumba del arquitecto Senenmut (TT 353), con los meses de shefedet, renenutet, rekhe I y rekeh II (fuente whatisdrawing.wordpress.com).

Los círculos fueron representados con asiduidad relacionados con el astro rey, el Sol, pero la utilizaicón de la circunferencia como un todo divisible en partes la encontramos en la tumba 353 del arquitecto de la reina Hatshepsut, Senenmut (XVIII dinastía) construida en la llanura de Deir el-Bahari, cerca del templo de su señora. En su techo astronómico se pueden apreciar 12 círculos, 8 al lado derecho y 4 en el izquierdo, representativos de los 12 meses del año, divididos en 24 porciones que indicarían las 24 horas en ls que estaba dividido el año egipcio, 12 horas diurnas y 12 nocturnas de diferente longitud dependiendo de la época del año.

El área de un círculo se calcula en la actualidad como el

producto del irracional π por el cuadrado del radio ($A = \pi r^2$), pero siguiendo a Arquímedes el área del círculo es **igual a la de un triángulo rectángulo cuyos catetos son el radio y la longitud de la circunferencia del propio círculo**.

El área de un triángulo rectángulo es el semi producto de los dos catetos, uno funcionando como base y otro como altura. Siguiendo a Arquímedes, tenemos

$$A_c = \frac{c_1 . c_2}{2} = \frac{2\pi r . r}{2} = \pi r^2$$

Kepler lo demuestra de un modo intuitivo dividiendo un círculo en 12 sectores circulares iguales descomponiendolo (figura a) posteriormente en un romboide circular de base una semicircunferencia y de altura el radio (figura b).

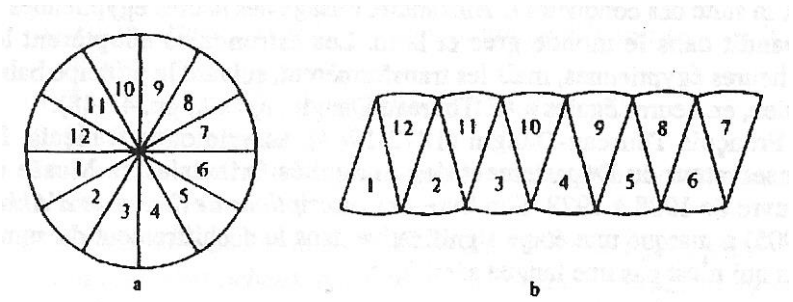


Ilustración 3. Explicación del área de un círculo según Kepler (fuente (OBENGA, 1995)).

Problema 48 del PMR

Este ejercicio carece de enunciado. Solamente aparece un dibujo, un cuadrado con una figura geométrica de lo que podría ser un círculo o un octógono inscrito en él.

El planteamiento del ejercicio podría ser como sigue.

Comparar el área de un círculo con la del cuadrado circunscrito a él que tiene de lado 9 khet.

El valor del diámetro, la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia, se coloca en el interior de la figura. El radio, segmento que partiendo del centro alcanza cualquier punto de la circunferencia, tiene como longitud la mitad del valor del diámetro. Este concepto no aparece en ninguno de los problemas que nos han llegado hasta el momento, si excluimos una de las versiones del problema 10 del PMM que considera que se trata de averiguar el área

de un semicírculo de radio *tp-r* 4 1/2, hecho que no es compartido por muchos autores quienes piensanlo que el problema calcula es el área de una semiesfera o de un semicilindro.

Es importante hacer notar que los egipcios no conocieron el número π, motivo por el que tuvieron que desarrollar un método para los cálculos en los que interviene, el área del círculo ($A = \pi r^2$). La metodología aplicada es muy sencilla **restar la novena parte a su diámetro y elevarlo al cuadrado**.

Un cuadrado es un paralelogramo (polígono de cuatro lados que tiene los lados paralelos dos a dos) que tiene sus lados iguales y sus cuatro ángulos iguales.

Comenzamos con el área del círculo. Restamos la novena parte del diámetro (9 − 1 = 8). Valor que eleva al cuadrado.

1	**8**
2	16
4	32
8	**64**

El área del círculo es 64 **setjat**.

Comparemos el valor obtenido por el escriba con el que podemos calcular hoy en día utilizando el valor del número π (3,141592... pues se trata de un irracional con infinitos decimales).

$$A = \pi r^2 = \pi\left(4 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}\pi$$

Considerando que el radio es 4 1/2.

Como el valor obtenido por los egipcios es 64 **setjat**, igualamos ambos resultados.

$$\frac{81}{4}\pi = 64$$

$$\pi = \frac{256}{81} = 3{,}160$$

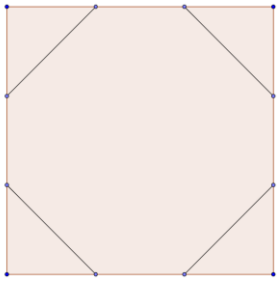
... cometiéndose un error del 0,6 %.

Calculemos el área del cuadrado ($A = l^2$).

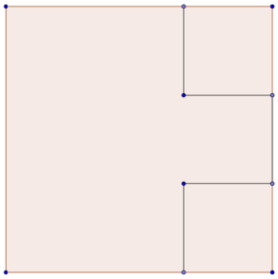
1	**9**
2	18

4	36
8	72
9	**81**

Si la figura geométrica es un octógono, el área se puede calcular fácilmente de forma gráfica.



La superficie de la figura representada puede asimilarse a un rectángulo de área 9 x 6 (54) más un cuadrado de área 3 x 3 (9). Sumando ambas el resultado es 63, área un poco inferior al del círculo.



Si el octógono fuese regular el cálculo del área se complicaría sobremanera, puesto que el cálculo de las áreas de los polígonos regulares se efectúa según la fórmula

$$A = \frac{perímetro\ x\ apotema}{2}$$

La apotema (distancia entre el centro de un polígono regular y uno cualquiera de sus lados) es en nuestro ejercicio 4,5, la mitad del lado del cuadrado, el valor supuesto para el radio de la circunferencia inscrita. Para hallar el perímetro (suma de los lados de un polígono) es necesario calcular la longitud del lado. Aplicaremos un procedimiento trigonométrico. Si dividimos los 360º de una circunferencia completa entre 8, nos dará el valor del ángulo central (aquel que teniendo su vértice en el centro del polígono abarca un arco cuya cuerda es el lado del polígono) del octógono regular. En el caso del octógono regular el ángulo central es de 45º. La apotema esel segmento que partiendo del vértice y suguiendo la recta bisectriz

(recta que divide un ángulo en dos partes iguales) alcanza el lado opuesto al ángulo. Ahora podemos construir un triángulo rectángulo con un ángulo agudo que sea la mitad del ángulo central del octógono (22,5º), un cateto, la apotema, el otro cateto la mitad del lado del octógono y la hipotenusa el segmento que va desde el centro del polígono a uno de los vértices del octógono. Como sabemos que la tangente de un ángulo es el cociente entre el cateto opuesto (la mitad del lado del octógono) y el cateto adyacente (apotema) podemos calcular el lado.

$$\tan 22{,}5° = \frac{mitad\ del\ lado}{apotema}$$

$$mitad\ del\ lado = \tan 22{,}5° \,.\, apotema$$

$$mitad\ del\ lado = 0{,}4142.4{,}5 = 1{,}864$$

$$lado = 3{,}728$$

$$A = \frac{perímetro\ x\ apotema}{2} = \frac{(8x3{,}728).\,4{,}5}{2} = 67{,}1026$$

... lejos del valor obtenido en el ejercicio.

Alguno autores han pretendido ver, aproximándose más a la figura que muestra el papiro, un octógono no regular con un eje de simetría que pasa por una de las diagonales del cuadrado (GUILLEMOT, 1992, págs. 138-140) con las medidas que presentamos en la figura.

El área de esta figura se calcula con facilidad. Basta con restar del área del cuadrado de 9 unidades de lado las áreas de los 4 triángulos, iguales dos a dos, o lo que es equivalente, el área de un cuadrado de lado 3 y de un rectángulo de 4 por 2.

El resultado $9^2 - 3^2 - (4x2) = 64$ que se corresponde con el área de un círculo calculado de la forma egipcia. **"El área de un círculo es equivalente al área del octógono inscrito en un cuadrado de lado 9 unidades"**.

Veamos alguna de las teorías que se han esgrimido para explicar el procedimiento por el qu los matemático egipcios llegaron a valor de π de 3,16.

Struve (STRUVE, 1930, pág. 182) aporta una teoría para el cálculo de π por los egipcios, comparando el perímetro de un cuadrado (k) con el de una circunferencia (c) que puede fácilmente medirse con un hilo,de forma que

$$k = \frac{5c + \Delta}{4}$$

... siendo el valor del incremento (Δ) 1/16 de c/4, o sea, c/64

... de donde se deduce

$$\frac{c}{k} = \frac{64}{81}$$

Si comparamos los dos perímetros

$$\frac{2\pi r}{4l} = \frac{2\pi \frac{l}{2}}{4l} = \frac{\pi}{4}$$

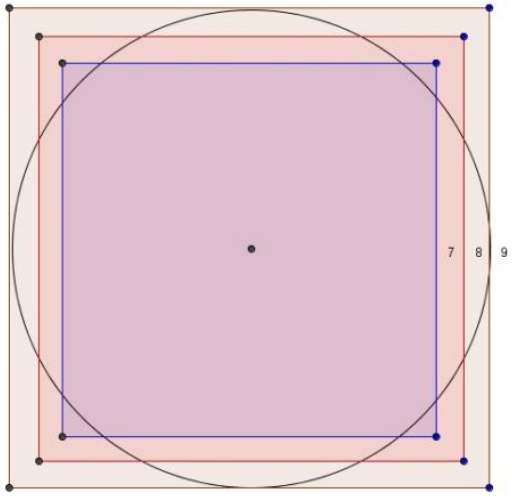
$$\frac{\pi}{4} = \frac{64}{81}$$

$$\pi = \frac{256}{81}$$

También se podría calcular sumando los cuadros que ocupa un círculo en el interior de un cuadrado de lado 9. Cada cuadradito es $\left(\frac{d}{9}\right)^2$.

El cálculo aproximativo egipcio bien pudo estar relacionado con un procedimiento semejante al utilizado por Arquímedes. Se construiría un círculo inscrito a un cuadrado de lado 9.Luego, con el mismo centro que las figuras anteriores se dibujaría un cuadrado de lado 7. Una vez construida la figura se observa que el área del círculo estaría comprendida entre el área de ambos cuadrados. Si ahora

dibujamos un cuadrado de lado 8, se observa que queda entre los anteriores, lo que da una buena aproximación.



Existen otras propuestas en la bibliografía para explicar la elección del cuadrado de 8 unidades de lado.

Si dibujamos un cuadrado de 8 unidades de lado, su área es 64 unidades cuadradas, la misma que encontramos en el problema 41. Dividimos el lado del polígono en cuatro partes iguales y hacemos pasar una circunferencia por esos puntos, la superficie de la parte que queda fuera del cuadrado es parecida a la que queda fuera del círculo y el diámetro, aplicando el teorema de Pitágoras, es $4\sqrt{5}$ ($\sqrt{8^2+4^2}$), 8,944 unidades, valor muy muy próximo a 9, dato del problema del PMR (ROBINS, 1987, pág. 45).

En todas las épocas del Egipto dinástico no se siguió el mismo pricedimiento para el cálculo del área del círculo. En un papiro demótico de El Cairo, fechado en el siglo III a.C., se calcula la

longitud del diámetro de un círculo partiendo del valor de su área como el doble de la raíz cuadrada de 1/3 de la misma

$$d = 2\sqrt{\frac{A_c}{3}}$$

... lo que da un valor para π equivalente a 3, el mismo que otorgaron los pueblos mesopotámicos

$$2r = 2\sqrt{\frac{A_c}{3}}$$

$$(r)^2 = \frac{A_c}{3}$$

$$A_c = 3r^2$$

... indicando un deterioro en el conocimiento matemático egipcio desde el Reino Medio hasta el periodo ptolemaico.

Gerdes (1985, págs. 261-268) estudia los motivos por los que los egipcios se habrían planteado el estudio del área del círculo y su cálculo. Se conoce que algunos pueblos africanos indígenas utilizaban grabados con círculos concéntricos serpentiformes que facilitarían la apreciación del cálculo del área del círculo al compararla con la de un cuadrado.

Durante la época ptolemaica se utilizó un valor de π igual a 3 (COUCHOUD, 1993, pág. 64). El astrónomo Ptolomeo da un valor de π entre

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

Problema 50 del PMR

Calcula el área de un círculo de 10 khet de diámetro.

Este problema está resuelto en el ejemplo 48, la comparación del área del cuadrado y de su círculo inscrito.

Restamos la novena parte del diámetro de 9, obteniendo 8. Valor que elevamos al cuadrado, 64 **setjat**.

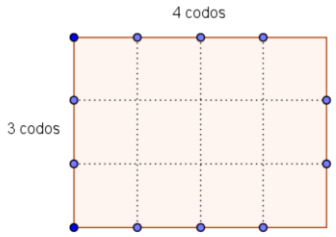
Cálculo del área de un rectángulo

Un rectángulo es un paralelogramo que tiene los cuatro ángulos iguales rectos y los lados iguales dos a dos. Su área su calcula multiplicando el valor de la longitud de su base por la de su altura. El concepto de esquina, quizá, desde el pnto de vista matemático, ángulo recto, es expresado por el vocablo *qnbt*, con un determinativo que es reflejo de la intersección de dos muros perpendiculares (signo O38 de Gardiner).

Sin duda el vocablo 'rectángulo, rectangular' *jfd* deriva del numeral *jfdw*, 4. Al mismo grupo semántico pertenecen *jfd* 'tela, alfombra' (Campesino elocuente R, 48) e *jfdy* 'lecho, diván' (Westcar 10,12).

Quizá fuera más conveniente traducir por "paralelogramo" o simplementi "cuadrilátero", pues, hasta el momento, no hemos encontrado ninguna palabra que diferencie un rectángulo de un cuadrado, como podemos comprobar en el problema 44 del PMR donde la base de un granero ortoédrico es un cuadrado y recibe el nombre de *jfd*.

Es de todos conocida la forma de calcular el área de un rectángulo, el producto de la longitud su base por la de su altura, pero ¿cómo llegaron los egipcios a ello? Seguramente por un procedimiento geométrico. Es sencillo dibujar un rectángulo de 4 codos de largo por 3 de ancho y dividirlo en cuadrados de 1 codo por 1 codo. Al contar el número de cuadrados el egipcio observa que son 12, el producto de la longitud de su base por su altura.



Problema 49 del PMR

Calcular el área de un rectángulo de 10 khet de base por 1[6] khet de altura.

En el problema propuesto el primer paso es convertir los **khet** a codos según su equivalencia (1 **khet** son 100 codos). Por lo que el problema se leería "calcular el área de un rectángulo de 1000 codos de largo por 100 de ancho".

1	**1000**
10	10000
100	**100000**

Valor que divide entre 100 para expresar el resultado en **tiras de codo cuadrado** (rectángulos de 1 **khet** de largo por 1 codo de ancho).

1	**100000**
1/10	10000
1/10 de 1/10	**1000**

Problema 6 del PMM

Se te dice que un rectángulo tiene 12 setjat de área y que la longitud de su altura es 1/2 1/4 la de su base ¿cuáles son las medidas de sus lados?

La ecuación que plantearíamos es

$$12 = x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)x$$

$$x = \sqrt{\frac{12}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}} = 4\ khet$$

Es la longitud del lado mayor. Para calcular el menor multiplicamos por 3/4 (1/2 1/4), obteniéndose 3 khet.

El método utilizado por el escriba es semejante. Calcula el inverso de 1/2 1/4, 1 1/3, valor que multiplica por 12 para obtener 16. Solamente queda extraer la raíz cuadrada para conseguir la longitud del lado mayor, 4 khet.

Luego halla 1/2 1/4 de 4, la medida del lado menor, 3 khet.

La prueba no ofrece dificultad, multiplica 4 por 3.

1	**4**
2	8
3	**12**

Llama la atención en este ejercicio las dimensiones del rectángulo, 4 khet de base por 3 khet de altura que serían los catetos del famoso triángulo pitagórico 3-4-5, siendo la hipotenusa la diagonasl del paralelogramo.

Problema 18 del PMM

Es un problema extraño. Parece tratarse del cálculo del área de una pieza de lino rectangular, porque utiliaz lo svocablos propios de los lados de un rectángulo: *ꜣw* (longitud) y *sḫw* (anchura).

Lo podemos enunciar como **tienes una pieza de lino de 5 codos y 5 palmos de longitud por 2 palmos de anchura ¿cuál es su área?**

Según la matemática actual multiplicaríamos la base por la altura, método que utiliza el escriba, pero de una forma curiosa.

En primer lugar realiza el cambo de unidades de codos a palmos de la longitud de la pieza. 1 codo son 7 palmos, obtiene el valor de 35 palmos (7 por 5). Cuando lo lógico sería sumar los palmos de la longitud (35 más 5 igual a 40), el matemático egipcio no lo hace y multiplica por la anchura los dos valores, obteniendo 70 (35 por 2) y 10 (5 por 2), para sumarlos más tarde dando el resultado de 80 **palmos cuadrados**.

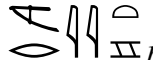
$$(35 + 5)2 = 70 + 10 = 80\ palmos\ cuadrados$$

Cálculo del área de un triángulo

Un triángulo es un polígono de tres lados. Pueden clasificarse dependiendo de sus lados o de sus ángulos.

Según sus lados un triángulo puede ser equilátero (sus tres lados iguales), isósceles (dos lados iguales y diferentes del tercero) y escaleno (lados desiguales). Sin duda el triángulo isósceles era bien conocido por los egipcios, pues las caras de las pirámides pertencen a este grupo.

Según sus ángulos pueden ser acutángulos (tres ángulos agudos menores de 90º), rectángulo (un ángulo recto) y obtusángulo (un ángulo obtuso, mayor de 90º).

Los ejercicios del área de un triángulo se van a encontrar con una dificultad básica, determinar el tipo de triángulo al que se refiere el ejercicio. El vocablo  *mryt* podría tener diferentes significados dependiendo del tipo de triángulo que asignemos y del componente geométrico que asignemos.

Existen tres problemas en los manuscritos matemáticos donde aparece la palabra *mryt*: los problemas 51 y 52 del PMR y el problema 4 del PMM. en principio tendríamos tres posibilidades para mryt en los triángulos. Si el triángulo a considerar es rectángulo, *mryt* haría referencia al cateto mayor (altura del triángulo). Esta hipótesis viene apoyada por el problema 4 del PMM en el que se calcula el área del triángulo convirtiéndolo en un rectángulo. La segunda posibilidad es considerar *mryt* como la altura del triángulo acutángulo cualquiera, quizá isósceles, reforzada por el hecho de que en el problema 52 del PMR se utiliza para designar la altura de un trapecio. En estos dos casos los resultados obtenidos por el escriba egipcio serían exactos. El tercer caso es pensar que *mryt* designa uno de los lados de un triángulo isósceles acutángulo, lo que provocaría un error en el cálculo. Como el valor de la altura sería menor que el del lado del triángulo isósceles se cometería un error

$$h^2 = l^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

... dependiente de los valores de la altura y de la base.

Ilustración 4. Distintas posibilidades para los triángulos que aparecen en los problemas de los papiros matemáticos.

Si *mryt* fuese un lado, no parece probable que se trate de un triángulo escaleno en el que los dos lados no considerados la base serían distintos, porque los problemas solamente nos dan el valor de dos lados.

La palabra triángulo, *spdt* en el PMR y *sbdt* en el PMM (el reemplazamiento de la "p" y por la "b" se debe a semejanza de sonoridad entre ambas; la "p" oclusiva labial sorda y la "p" oclusiva labial sonora, en egipcio), no deriva como podríamos pensar del número 3, *ḫmt*, (recordemos que *jfd*, rectángulo, si provenía del número 4) sino que se relaciona con el vocablo *spd* 'agudo', sin duda por el ángulo agudo opuesto a su base. Interesante es la relación semántica con la estrella Sirio, *Spdt* , escrita en los Textos de los Sarcófagos como (FAULKNER, A Concise Dictionary of Middle Egyptian, 1988, pág. 224), un sistema estelar ternario (Sirio A, B, C) con una magnitud aparente de -1,47, lo que la hace la estrella más brillante del cielo norte.

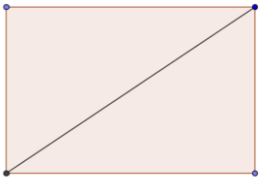
Problema 51 del PMR

Calcula el área de un triángulo de 10 khet de altura y 4 khet de base.

El vocablo *mryt* podrá significar tanto altura como cateto mayor, lo que no influye para el cálculo del área. Sabemos que el área de un triángulo es **el semiproducto de la base por la altura**, o en el caso de un triángulo rectángulo **el semiproducto de los dos catetos**.

$$A = \frac{b.h}{2}$$

El procedimiento a seguir por el escriba es el mismo que el actual, al que el matemático egipcio pudo llegar fácilmente por geometría. El área de un triángulo es la mitad del área de un rectángulo de las mismas medidas.



Primero realiza la conversión de la altura de **khet** a codos multiplicando por 100 (4 por 100 son 400) y calcula la mitad de la altura (400 entre 2 son 200).

1	**400**
1/2	200

Ahora multiplica el valor de la altura en codos por la base en **khet** para obtener el área en **tiras de codo cuadrado**, la centésima parte de un **setjat**.

1	**1000**
2	2000

El resultado del ejercicio se da en **kha-ta**: 2 (dividiendo el resultado entre 1.000), un múliplo del **setjat** (1 kha-ta es 1 setjat).

Para realizar el cálculo en **setjat** el egipcio calcula la mitad de la altura en **khet** (la mitad de 4 es 2), y la multiplica por la longitud de la base en **khet** (2 por 10). El área es 20 **setjat**.

Problema 7 del PMM

Tienes un triángulo de 20 setjat de área y la relación entre su base y su altura es 21/2 ¿Cuáles son las longitudes de ambas?

El método que seguiríamos es

$$20 = \frac{\left(2 + \frac{1}{2}\right) h^2}{2}$$

$$h = \sqrt{\frac{40}{2 + \frac{1}{2}}} = 4\ khet$$

Si la altura es 4 khet, la base es 10 khet (4 por 2 1/2).

La metodología del matemático egipcio es diferente. Primero multiplica el área por 2 para conseguir el área del rectángulo equivalente, 40 **setjat**.

$$40 = \left(2 + \frac{1}{2}\right) h^2$$

El siguiente paso es multiplicar 40 por 2 1/2.

$$40\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 h^2 = 100$$

Realiza la raíz cuadrada en ambos miembros.

$$10 = \left(2 + \frac{1}{2}\right) h$$

Calcula el inverso de 2 1/2, obteniendo 1/3 1/15.

1	**2 1/2**
1/3	2/3 1/6
1/15	1/10 1/30 1/30 (1/6)
1/3 1/15	**1**

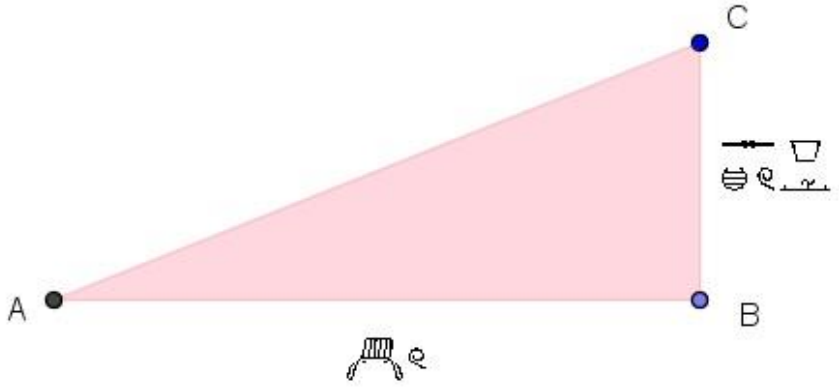
Solamente queda multiplicar el inverso por 10 para llegar a la medida de la altura.

1	**1/3 1/15**
2	2/3 1/10 1/30 [2/15]
4	1 1/3 1/5 1/15
8	2 2/3 1/3 1/15 [2/5] 1/10 1/30 [2/15]
10	**4**

La suma de 1/10 1/30 1/15 1/10 1/30 suman 1/3, como puede comprobarse tomando como número base m = 30.

Una vez hallada la altura, 4 **khet**, la base se obtiene multiplicando su valor por 2 1/2, 10 **khet**.

Es interesante hacer notar que el vocablo utilizado para establecer la relación entre los lados del triángulo es *jdb* ( ), cuyo significado original es 'orilla, ribera' Conviene profundizar un poco más en esta palabras desde el punto de vista matemático. Si suponemos que el triángulo del ejercicio es rectángulo, la proporción dada entre los lados del triángulo es la relación entre los catetos que el problema determina como 10 **khet** para el cateto mayor (longitud) y 4 **khet** para el menor (anchura). Considerando que la longitud (*ꜣw*) corresponde al cateto adyecente o contiguo y que la anchura (*sḫw*) es el valor del cateto opuesto, *jdb* determina la cotangente del ángulo.



jdb = *ꜣw* / *sḫw* = cotangente BAC

La tesis que sugiere que se trata de un triánglo rectángulo se apoya en los vocablos utilizados en el ejercicio, *ꜣw* y *sḫw*, en contraposición con los utilizados en lo que parecen ser otros triángulos, posiblemente isósceles, que son *mryt* (altura) y *tp-r* (base) (COUCHOUD, 1993, pág. 52).

Problema 17 del PMM

Conociendo que el área de un triángulo es 20[7] setjat y que su base (cateto) es 1/3 1/15 khet de su altura, ¿cuáles son las medidas de la base y de la altura?

Al parecer se trata de un triángulo rectángulo (aquel que tiene un ángulo recto entre dos de sus lados llamados catetos; el lado opuesto al ángulo recto es la hipotenusa), por lo que la longitud de los dos catetos determina la de la base y la de la altura.

En la nomenclatura actual el problema se resuelve mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, sabiendo que el área de un triángulo es el semiproducto de la base por la altura. Las ecuaciones se escriben

$$\begin{cases} 20 = \dfrac{bh}{2} \\ b = \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15}\right) h \end{cases}$$

$$\begin{cases} bh = 40 \\ b = \dfrac{2}{5} h \end{cases}$$

Aplicando el método de <u>sustitución</u> (despejamos una variable

en una de las ecuaciones y la sustituimos en la otra)

$$\frac{2}{5}h.h = 40$$

$$h^2 = 100$$

$$h = 10\ khet$$

Si la altura es 10 **khet**, la base será el producto de 10 por 1/3 1/15, obteniéndose 4 **khet**.

El matemático aplica un procedimiento similar. Duplica 20 obteniendo 40. Luego calcula el inverso del paréntesis de la segunda ecuación, resultado 2 1/2.

1	**1/3 1/15**
1/2	1/6 1/30
2	2/3 1/10 1/30 [2/15]
2 1/2	**1**

La situación del ejercicio según la nomenclatura actual es

$$\begin{cases} bh = 40 \\ b\left(2 + \frac{1}{2}\right) = h \end{cases}$$

Ahora el escriba multiplica 40 por 2 1/2 resultando 100. Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por el valor de h, resultando

$$40\left(2 + \frac{1}{2}\right) = h^2$$

$$h^2 = 100$$

Extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros, operación que realiza el matemático egipcio, obteniendo el valor de la altura: 10 **khet**. Multiplicando el tamaño de la altura por 1/3 1/15 nos da la longitud de la base: 4 **khet**.

Cálculo del área de un trapecio

Un trapecio es un cuadrilátero (polígono de cuatro lados) que presenta dos lados paralelos y otros dos que no lo son. Un trapecio es rectángulo cuando presenta dos ángulos rectos, e isósceles si los dos lados no paralelos son iguales. Sea cual sea la forma del trapecio el cálculo de su área es el mismo. En el ejercicio que veremos a

continuación el trapecio dibujado por el escriba no parece ni isósceles ni rectángulo.

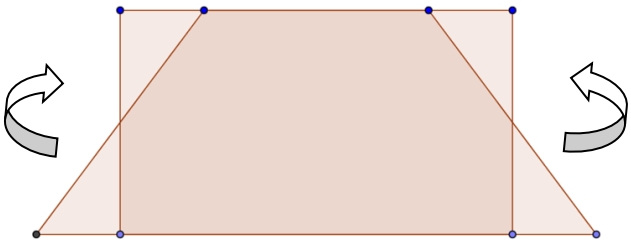
Problema 52 del PMR

Calcula el área de un trapecio de 20 khet de altura, 6 khet de base mayor y 4 khet de base menor.

En los colegios actuales se calcula el área del trapecio como **la semisuma de las bases por la altura**.

$$A = \frac{B + b}{2} h$$

El procedimiento del escriba es el mismo que el nuestro al que pudo llegar por geometría. Como podemos observar en la figura el área de un trapecio se puede asimilar al área de un rectángulo de la misma altura, pues los triángulos inferiores excedentes se acoplan a los huecos superiores.



Ahora tenemos que demostrar que la base del rectángulo es la semisuma de las bases del trapecio. Para ello, de forma gráfica, partimos de dos trapecios rectángulos (aquellos que tienen dos ángulos rectos) iguales y acoplados.

Sepuede apreciar como el área de los dos trapecios se asimila a la de un rectángulo que tiene como base la suma de las dos bases del trapecio y de altura la misma que el trapecio.

$$A_r = (B + b).h$$

Luego el área de uno de los trapecios será la mitad del área de ese rectángulo.

$$A_t = \frac{B + b}{2} . h$$

Este procedimiento fue fácilmente observable por el escriba.

Volvamos al ejercicio. El matemático realiza un cambio de unidades en la longitud de las bases y de la altura transformando los **khet** en codos multiplicando los valores por 100. Así la base mayor es 600 codos, la base menor 400 codos y la altura 2000 codos.

Ahora simplemente aplica la fórmula. Suma ambas bases obteniendo 1000 codos (400 + 600). Valor que divide entre 2, 500 codos (semisuma de las bases) y multiplica por el valor de la altura, 20000 codos, totalizando 10000 codos cuadrados.

Para finalizar realiza el cambio de unidades a **tiras de codo cuadrado** (un rectángulo de 100 codos de base y 1 codo de altura) dividiendo entre 100. El área del trapecio es 100 **tiras de codo cuadrado**.

Cálculo del área de un trapezoide

Un trapezoide es un cuadrilátero (polígono de cuatro lados) cuyos lados no son paralelos. Por regla general su área se calcula dividiendo el polígono en cuestión en dos triángulos y sumando sus áreas.

En el templo ptolemaico[8] de Edfú (إدفو en árabe) dedicado al dios halcón Horus, ubicado en Djeba, la Apollinopolis Magna de los griegos, en la orilla occidental del Nilo, Karl Lepsius encontró varias inscripciones con lo que parecen áreas de parcelas de tierra (aparece el jeroglífico) de trapezoides, ordenadas en series de cinco números.

En la primera de ellas se listan 9 superficies cuadrangulares (LEPSIUS K. , 1856, pág. 75 y 85). Si los lados desiguales de estos polígonos fueran paralelos hablaríamos de trapecios isósceles, lo que sería aplicable a todos los casos excepto al penúltimo (marcado en rojo).

a	b	c	d	e

22	23	4	4	90
(2)2	21	4	4	86
21	20	4	4	82
20	19	4	4	78
19	18	4	4	74
18	1(7)	4	4	70
17	16	4	4	66
16	15	4	3 1/2	58 1/8
15	15	3 1/2	2 1/2 1/4 1/16 1/32	47 1/2 1/4 1/16
totalizan				651 1/2 1/4 1/16
como regalo de Nectanebo				107 1/4 1/16
totalizan				759 1/8[9]

¿Cómo deben entenderse esas cifras? Lepsius propone (1856, pág. 77) para el resultado final la fórmula

$$\frac{a+b}{2} x \frac{c+d}{2} = \frac{(a+b)(c+d)}{4} = \frac{ac+ad+bc+bd}{4} = e$$

Como la inscripción no nos precisa la naturaleza de cada uno de los datos se estudia varias hipótesis. En primer lugar se presupone que a más b constituyen un lado de un rectángulo dividido en dos porciones, mientras que c y d serán la misma medida de los otros dos lados perpendiculares al anterior y paralelos entre sí..

El área así calculada es el producto de la base (a + b) por la altura, o la semisuma de los otros dos lados, (c + d)/2.

$$(a+b)\frac{c+d}{2} = \frac{ac+ad+bc+bd}{2} = 2e$$

El doble del valor obtenido en la columna "e".

Una segunda posibilidad discutida por Lepsius (1856, pág. 78) es considerar los lados desiguales como las bases de un trapecio rectángulo cuya altura es la suma de los dos lados iguales.

En esta ocasión el área es el producto de la altura (c + d) por la semisuma de las bases, (a + b)/2.

La superficie obtenida es la misma que en el caso anterior, el doble del valor aportado por la inscripción.

$$(c+d)\frac{a+b}{2}=\frac{ac+ad+bc+bd}{2}=2e$$

En 8 de los 9 casos presentados los valores podrían referirse a un trapecio isósceles donde los datos desiguales formarían las dos bases paralelas del polígono.

Para hallar el área se necesita el valor de la altura (altura por la sesisuma de las bases), valor que puede hallarse considerando el seno del ángulo que forman los lados cb o db como sigue

$$\sin(cb)=\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}=\frac{h}{c}$$

$$h=c.\sin(cb)$$

Si consideramos el otro lado

$$h=d.\sin(db)$$

Sumando ambos valores y teniendo en cuenta que el seno en ambos casos tien el mismo valor.

$$2h = (c + d)\sin(cb)$$

$$h = \frac{c + d}{2}\sin(cb)$$

... que aplicado al área del trapecio resulta

$$\frac{(a + b)}{2} \cdot \frac{(c + d)}{2}\sin(cb) = \frac{ac + ad + bc + bd}{4}\sin(cb)$$

... resultado algo menor al propuesto en la inscripción debido a que el seno (cb) tiene un valor inferior a 1, dependiendo de cada caso. El ángulo en las siete primeras entradas es el mismo. Podemos hallarlo mediante el cálculo del coseno de cb.

$$\cos(cb) = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{\frac{b - a}{2}}{c} = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$$

... que corresponde a un ángulo de 82º 49' 9,28''.

La fórmula anterior queda entonces como

$$\frac{ac + ad + bc + bd}{4}0{,}992157$$

... valor próximo al que aporta la inscripción, con un error inferior al 1%.

Algo diferente es el caso de la entrada 9 cuyo ángulo es 87º 29' 33,03'' con un seno de 0,999043, más cercano a la unidad, con un error menor del 1%.

El inconveniente de esta valoración está en la entrada 8, un trapezoide en toda regla al que no se le pueden aplicar estos criterios.

Ora posibilidad es considerar que los valores inscritos expresan las longitudes de las semidiagonales, construyendo en los 8 casos con lados iguales (c = d) un trapezoide deltoide y uno no deltoide para la entrada 8, cuya área se calcula con facilidad

... como la suma de las áreas de los dos triángulos que lo conforman

$$\frac{a(c+d)}{2}+\frac{b(c+d)}{2}=\frac{(a+b)(c+d)}{2}$$

... el doble del valor grabado en los muros del templo de Edfú.

Veamos otra posibilidad (1856, pág. 78). Los datos se aplican a un trapecio rectángulo (dos de los ángulos son rectos).

El área sería

$$\frac{a+b}{2}x\frac{c+d}{2}=\frac{(a+b)(c+d)}{4}=\frac{ac+ad+bc+bd}{4}=e$$

... coincidente con la inscripción, pero con el inconveniente de no explicar el trapezoide.

Si suponemos que los datos aportados dan valores para lados de un cuadrilátero seguidos, no alternos, como en los casos anteriores, y que el técnico quiso indicar el área de un trapezoide, nos encontraremos con serias dificultades. La superficie de cuadrilátero irregular (trapezoide) puede escribirse como

$$\frac{ab.\operatorname{sen}(ab)+ad.\operatorname{sen}(ad)+bc.\operatorname{sen}(bc)+cd.\operatorname{sen}(cd)}{4}$$

... como podemos demostrar descomponiendo el trapezoide en dos

triángulos a través de sus dos diagonales.

Los valores de las alturas se calculan trigonométricamente

$$h_1 = a.sen(ad)$$

$$h_2 = b.sen(bc)$$

... considerando que los senos de ángulos suplementarios (aquellos que suman 180º) son iguales.

Así el área del trapezoide será las suma de las áreas de los dos triángulos.

$$A = \frac{d.a.sen(ad)}{2} + \frac{c.b.sen(bc)}{2}$$

Realizando el mismo procedimiento con la otra diagonal

... y calculando trigonométricamente los valores de las alturas $h_3 = d.sen(cd)$

$$h_2 = b.sen(ab)$$

... el área del trapezoide será las suma de las áreas de los dos triángulos.

$$A = \frac{c.d.sen(cd)}{2} + \frac{a.b.sen(ab)}{2}$$

Efectuando la suma de las dos áreas obtenidas

$$2A = \frac{d.a.sen(ad)}{2} + \frac{c.b.sen(bc)}{2} + \frac{c.d.sen(cd)}{2} + \frac{a.b.sen(ab)}{2}$$

... de donde

$$A = \frac{ab.\text{sen}(ab) + ad.\text{sen}(ad) + bc.\text{sen}(bc) + cd.\text{sen}(cd)}{4}$$

... la fórmula propuesta para un trapezoide conociendo sus lados y sus ángulos.

El error cometido en el cálculo de la superficie de un trapezoide es mayor que en los casos anteriores, porque cada uno delos senos de la fórmula añade un componente de error. El área obtenida en la inscripción sería mayor que la real.

Si el trapezoide fuera rectángulo, es decir, uno de sus ángulos fuera recto, todo se simplificaría, pues se puede calcular el valor de una de las diagonales por el teorema de Pitágoras, la correspondiente a los lados que forman el ángulo recto.

Una vez obtenida la longitud de la diagonal ("D") bastaría con aplicar la fórmula[10] que da en su libro Métrica (μετρικά), el sabio griego del siglo I d.C. Heron de Alejandría (Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεύς) para calcular el área de los dos triángulos conociendo sus lados, y así llegar a la superficie del trapezoide.

El área se calcula

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-d)(s-D)}$$

.... siendo s el semiperímetro del triángulo.

$$s = \frac{a+d+D}{2}$$

Algunas demostraciones de esta fórmula se dan en el anexo 10.

En el caso de que el trapezoide no fuera rectángulo, Lepsius propuso la fórmula

$$\frac{(AD+BG)}{2} \cdot \frac{(BF+CE)}{2}$$

... aplicada al trapezoide la figura[11].

En la misma inscripción se enumeran otras parcelas cuadrangulares.

	a	b	c	d	e
10	45 1/4	33 1/2 1/4	17	5	632
11	48 1/4	48 1/4	5	4	217 1/8
12	25	20	5	5	112 1/2
13	20	10	6	6	90
14	13	13	8	8	104

La parcela 14 podría tratarse de un rectángulo si los lados iguales estuvieran opuestos o de un trapezoide deltoide en el caso contrario.

En la inscripción III se enumeran rectángulos o trapezoides deltoides (15, 16, 17, 18, 20, 26) o trapezoides (19, 21, 22, 23, 24, 25).

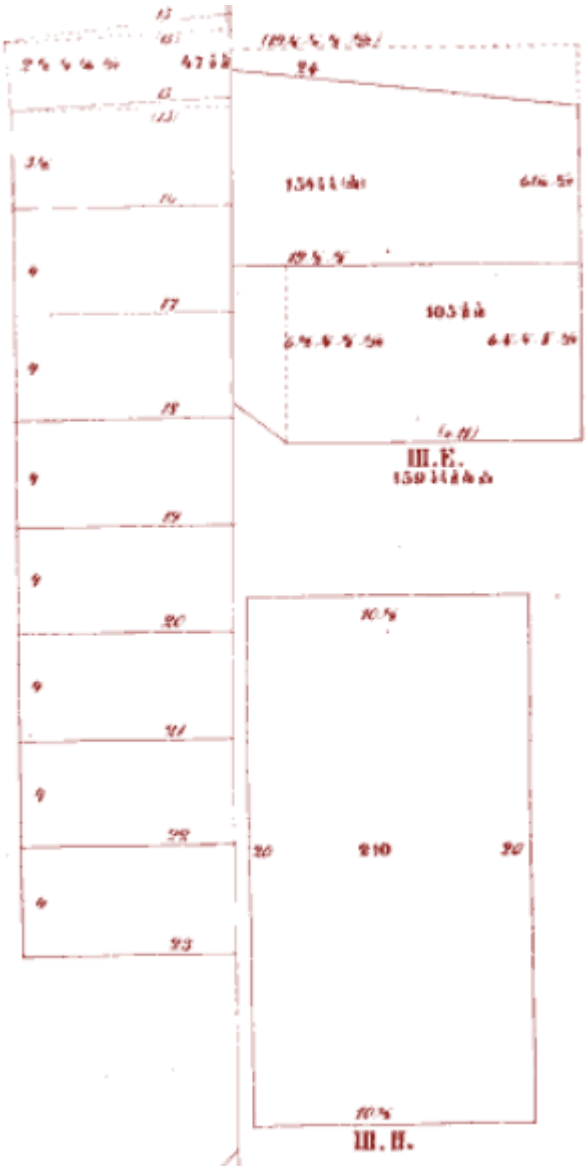


Ilustración 5. Distribución de las parcelas cuadrangulares en las inscripciones I y III del templo de Edfú (LEPSIUS K. , 1856).

	a	b	c	d	e
15	18 1/4 1/8	18 1/4 1/8	5 1/4 1/8	5 1/4 1/8	98 1/2 1/4 1/64
16	5 1/2 1/4 1/16	5 1/2 1/4 1/16	27	27	156 1/2 1/4 1/8 1/16 1/32
17	5 1/2 1/4 1/8	5 1/2 1/4 1/8	18	18	104 1/2 1/8
18	8 1/2 1/4	8 1/2 1/4	8	8	70
19	8 1/2 1/4	8	8	8	67
20	8	8	6	6	48

21	8	5[12]	3	3	19 1/2
22	[10 1/2 1/4 1/16 1/32][13]	[19 1/2 1/8]	[6]1/4 1/8 1/32	6 1/2 1/4 1/8 1/32	105 1/8 1/16
23	19 1/2 1/8	24	6 1/16 1/32	8	15 1/2 1/4
24	8	7	22	22	165
25	48 1/8	50	6 1/2 1/4 1/8	10	413 1/2 1/4 1/8...
26	10 1/2	10 1/2	20	20	210

En la inscripción V se lista otro grupo de parcelas de tamaños, por lo general, más pequeños.

	a	b	c	d	e
27	1 1/4	1 1/4	4	4	5
28	1 1/4	1/2	6	6	4 1/2
29	1/2	1/4	2	2	1/2 1/4
30	1/2	1/2 1/4	4	4	2 1/2
31	9 1/2	10 1/2	24 1/2 1/8	22 1/2 1/8	236 1/4
32	10 1/2	19 1/2	17	17	178 1/2
33	0	5	17	17	42 1/2
34	5	8	19	19	123 1/2
35	8	5	15	15	97 1/2
36	5	5	10	8	45
37	5	5	4	4	20
38	5	8	20	15	113 1/2 1/4
39	8	6	10	10	70
40	6	7	10	10	65
41	7	6 1/2	10	10	67 1/2
42	6 1/2	8 1/8	10	10	73 1/8
43	0	2	3	3	3
44	8 1/8	5	11	10	68 1/2 (1/4) 1/8 1/32
45	6	2 1/2	5	5	18 1/2 1/4
46	2 1/4	1/2	6	5	7 1/2 1/16

Llaman la atención las parcelas 33 y 43 que eliminan una de las dimensiones transformándose en triángulos isósceles en ambos casos.

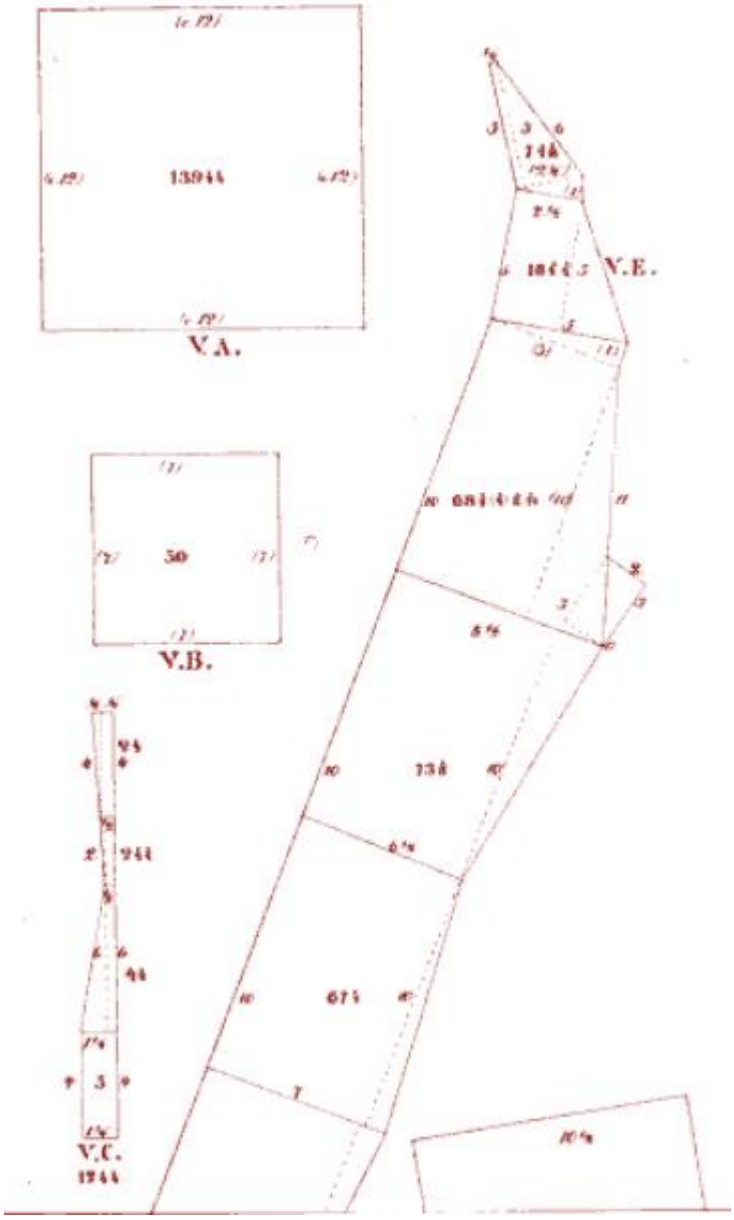


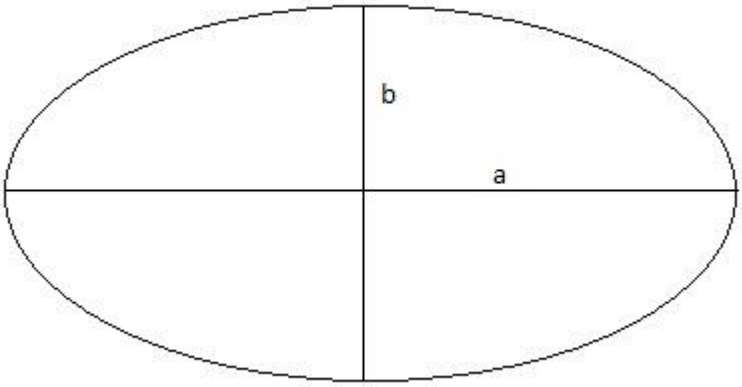
Ilustración 6. Distribución de las parcelas de la inscripción V del templo de Edfú (LEPSIUS K. , 1856).

Textos jeroglíficos de las inscripciones se muestran en el anexo 11.

El profesor J. H. Cole informo a Peet y Gunn que los métodos para la medición de las superficies de los campos utilizados por los agricultores nativos a principio del siglo XX eran los inscritos en las paredes del templo de Edfú (CHACE, 1927, pág. 134).

Cálculo del área de una elipse

Una elipse es **el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a otros dos fijos llamados focos es constante**. Resulta de cortar un cono circular por un plano que encuentra a todas las generatrices del mismo lado del vértice (RAE).



Siendo el semieje mayor 'a' y el semieje menor 'b', el área de una elipse se calcula como

$$A_e = ab\pi$$

... por asimilación al área del círculo.

En el anexo 7 se demuestra el área de la elipse por integración.

Una elipse es un cuerpo geométrico fácilmente dibujable. Basta con unir con una cuerda los dos focos y marcar en el suelo la línea con la cuerda tensada, tanto en la parte superior como en la inferior.

En dibujo puede construirse una elipse de la que se conocen el eje mayor y el menor de la siguiente forma.

a) Partiendo de uno de los extremos del eje menor se traza con una abertura de compás igual al semieje mayor un arco que cortará al eje mayor en dos puntos, los focos.

b) Dibujamos tres circunferencias concéntricas desde el centro de la elipse con radios menores que la distancia al foco y cortamos el eje mayor en seis puntos, simétricos dos a dos.

c) Con una distancia desde el extremo del eje mayor a a uno de los puntos trazamos un arco desde el foco más cercano (F) e

igualmente con la distancia desde el otro extremo al mismo foco, razamos otro arco desde el foco opuesto (F'). Repetimos el procedimiento con los puntos restantes.

d) Uniendo los puntos se obtiene el dibujo de la elipse.

Borchardt (1896, pág. 75) descubrió en el templo de Luxor, en la parte este del muro este de la posterior iglesia copta, un dibujo grabado sobre un muro, fechado en el reinado de Ramsés III (XIX dinastía), en el que ha reconocido un metodo para la construcción de una elipse, dibujada con la ayuda de partes de círculos de diferetes centros y diámetros. Se muestra interseccionando la elipse un rectángulo cuya área tiene un error del 1% en relación con el área de la elipse.

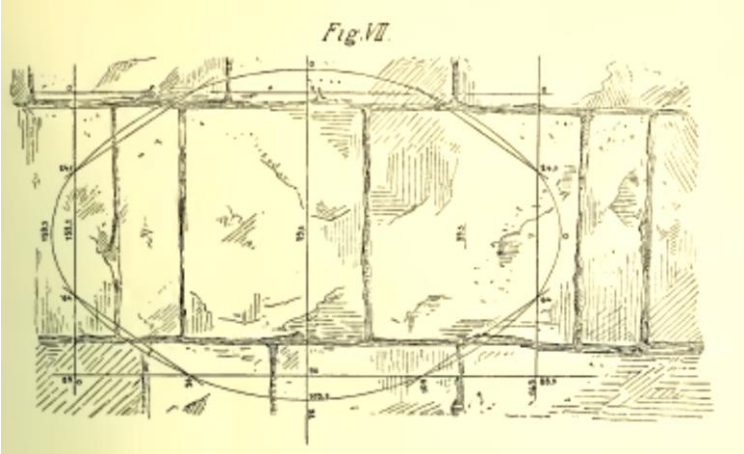


Ilustración 7. Dibujo de lo que parece ser una elipse encontrado en la parte oeste del muro oeste de la posterior iglesia copta en el templo de Luxor, fechado en la XIX dinastía (BORCHARDT L. , 1896, pág. Fig. VII).

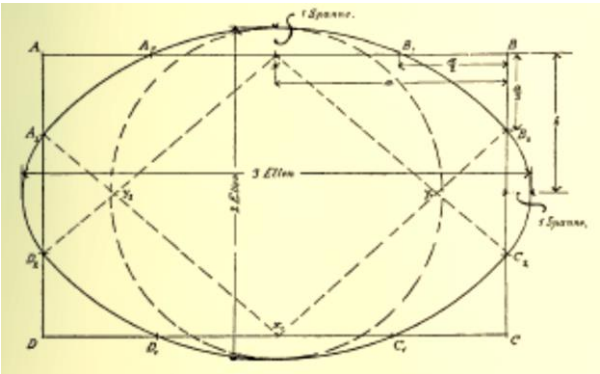


Ilustración 8. Esquema de la elipse del dibujo anterior (BORCHARDT L. , 1896, pág. Fig. VII).

El eje mayor de la elipse (2a) tiene 3 codos de longitud y el eje menor (2b), 2 codos. El área de esta elipse se ha asimilado al área de un rectángulo cuya base es el eje mayor, 3 codos, menos 1/7 por

cada lado, 2 1/2 1/7 1/14 codos[14] (AB = CD) su altura 2 codos, menos 1/7 por cada lado, 1 1/2 1/7 1/14 codos (AD = BC). La elipse interseccíona con el rectángulo en los puntos A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1 y D_2 con las siguientes distancias: A A_1 es 1/4 de AB (igual para BB_1, CC_1 y DD_1) y A A_2 es 1/6 de AB (igual para BB_2, CC_2 y DD_2).

La fórmula para el cálculo del área de una elipse por el matemático egipcio sería por analogía con la del círculo,

$$\left(2a-\frac{1}{9}2a\right)\left(2b-\frac{1}{9}2b\right)=\frac{16a}{9}.\frac{16b}{9}=ab\frac{256}{81}$$

Comparemos el valor de la superficie elíptica por el método actual ($A=\pi ab$), y los dos procedimientos egipcios, su equiparación con el área de un círculo egipcia ($A=ab\frac{256}{81}$) y con el área del rectángulo propuesto en el dibujo de Luxor, siendo 2a y 2b las longitudes de los ejes.

Modernamente obtendríamos un valor de

$$A=\pi ab=\pi(1{,}5x1)=1{,}5\pi=4{,}7124\ codos\ cuadrados$$

Si el egipcio hubiera utilizado el procedimiento aplicado a la superficie del círculo habría obtenido

$$A=ab\frac{256}{81}=1{,}5.1.\frac{256}{81}=\ 4{,}7407\ codos\ cuadrados$$

Siguiendo el método del rectángulo

$$A=\left(3-\frac{2}{7}\right).\left(2-\frac{2}{7}\right)$$

$$A=b.h=\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}\right).\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}\right)=$$

$$=4+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{49}+\frac{1}{196}+\frac{1}{392}=4{,}6530\ codos\ cuadrados$$

El error cometido en la medida es del 1,26% por defecto,mientras que de haber utilizado el procedimiento semejante al empleado para el área del círculo hubiera sido del 0,6% por exceso.

El sistema utilizado no sepuede generalizar, al restarse una cantidad concreta, no dependiente del valor de los semiejes. El error cometido dependerá de las longitudes de los semiejes.

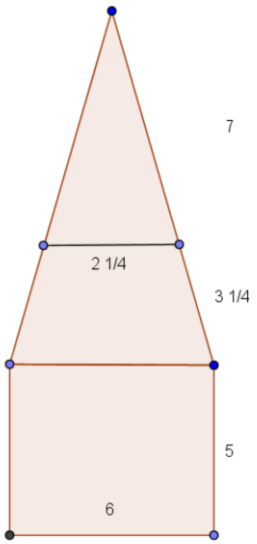
Daressy (1907, págs. 237-241) ha creído reconocer la construcción de un arco de elipse en una bóveda.

Cálculo de superficies mixtas

El problema que vamos a examinar a continuación entreve un conocimiento por parte del matemático egipcio, aunque solo sea leve, de lo que posteriormente se llamó teorema de Thales: dos rectas convergentes cortadas por un sistema de paralelas determinan segmentos proporcionales.

Problema 53 del PMR

Nos ha llegado sin enunciado. Muestra, si hacemos caso al papiro, una figura compleja compuesta de un rectángulo en su base y un triángulo en la cúspide, cortado por un segmento paralelo a la base, conformando un trapecio en el centro. El esquema es



... con los números de la derecha indicando las alturas.

El enunciado podría ser **calcular el área de la figura conformada por un rectángulo de 6 khet de base y 5 khet de altura, un trapecio de 3 1/4 khet de altura, con base mayor de 6 khet y base menor de 2 1/4 khet, y un triángulo de base 2 1/4 khet y de altura 7 khet**.

Veamos los datos del PMR. Para comprenderlos es preciso hacer alguna observación. En el cálculo del área del trapecio, la semisuma de las bases viene como 4 1/2 **khet**, cuando debería ser 4

1/8 **khet** (6 + 2 1/4 = 8 1/4) que dividido entre 2 resulta 4 1/2 **khet**, motivo por el cual creemos que el matemático resta 1/10, cuando el error cometido es

$$\frac{\left(4+\frac{1}{2}\right)-\left(4+\frac{1}{8}\right)}{\left(4+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{12}$$

La altura aplicada en el problema no es 3 1/4 **khet**, la presente en el dibujo, sino 1 1/4 **khet**, un error de copia.

El cálculo del área del trapecio siguiendo la fórmula expuesta, multiplicar la semisuma de las base por la altura.

1	**4 1/2**
2	9
1/2	2 1/4
1/4	1 1/8
1 1/4	**5 1/2 1/8**

Si utilizamos los datos del dibujo, una altura de 3 1/4 **khet**, el área sería 14 1/2 1/8 **setjat**, valor que maneja el escriba para calcular 1/10, posible aproximación por el error cometido en la semisuma de las bases.

La décima parte del área

$$\frac{14+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{10}=1+\frac{2}{5}+\frac{1}{20}+\frac{1}{80}$$

... que el egipcio, utilizando la tabla del 2/n del comienzo del papiro, convertiría en

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}+\frac{1}{80}$$

Sin embargo el problema muestra otro resultado, 1 1/4 1/8 **setjats** y 10 **tiras de codo cuadrado**, que no coincide el valor de la división

$$1+\frac{2}{5}+\frac{1}{20}+\frac{1}{80}$$

Si restamos, siguiendo un procedimiento semejante al algoritmo "voraz" 2/5 menos 1/4, valor aportado por el escriba, obtenemos 3/20 que sumados a 1/20 nos da 1/5 (4/20). Repetimos el algoritmo restando de 1/5 1/8, el valor del escriba, quedando 3/40

que sumados a 1/80 resultan 7/80, que transformamos en **tiras de codo cuadrado** multiplicado por 100 y realizamos la división 700 (7 por 100) entre 80, obteniendo 8 3/4 **tiras de codo cuadrado**.

En consecuencia la décima parte del área es 1 1/4 1/8 **setjats** y 8 3/4 **tiras de codo cuadrado**, que el egipcio aproxima a 10.

Clagett obtiene un resto de 10 3/4 **tiras de codo cuadrado** (CLAGETT, 1999, pág. 198).

El mismo valor se obtendría realizando la división

1	**10**
1/2	5
1/4	2 1/2
1/8	1 1/4
1 1/4 1/8	**13 1/2 1/4**

Para alcanzar 14 1/2 1/8 faltan 1/2 1/4 1/8 **setjat** que transformamos en **tiras de codo cuadrado** multipicando por 100 y dividiendo entre 10 para completar la cantidad de la división

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right).\frac{100}{10}=8+\frac{3}{4}$$

El área se calcula como la resta entre 14 1/2 1/8 **setjats** menos 1 1/4 1/8 **setjats** y 8 3/4 **tiras** (10 **tiras** si nos atenemos al valor del egipcio), que resulta 13 1/8 1/40 1/80 **setjats**.

Si realizamos el ejercicio con los valores correctos y calculamos el área del trapecio con una semisuma de las bases igual a 4 1/8 (6 más 2 1/4 dividido entre 2) y una altura de 3 1/4.

1	**4 1/8**
2	8 1/4
1/2	2 1/16
1/4	1 1/32
3 1/4	**13 1/4 1/8 1/16 1/32**

Queda por hallar el área de las otras dos figuras planas, el rectángulo de la base y el triángulo de la cúspide. Empezamos con el área del triángulo que tiene como base, la base menor del trapecio, 2 1/4 **khet**, y una altura de 7**khet**. Multiplicamos el valor de la base por la altura

1	**7**
2	14
1/2	3 1/2
1/4	1 1/2 1/4

2 1/4 15 1/2 1/4

... que multiplicamos por 1/2.

1 **15 1/2 1/4**
1/2 7 1/2 1/4 1/8

El área del triángulo es 7 1/2 1/4 1/8 **setjats**.

El valor el área del recttángulo inferior o se muestra, pero es fácil de calcular, el producto de la base por la altura: 6 por 5 son 30 **setjats**.

La superficie total de la figura se consigue con la suma de las tres áreas parciales: 13 1/8 1/40 1/80 **setjats** del área del trapecio más 7 1/2 1/4 1/8 **setjats** del área del triángulo y 30 del área del rectángulo inferior. Totaliza 51 1/40 1/80 **setjats**.

---

[5] HERODOTO DE HALICARNASO nos da su opinión al respecto. "Y, a mi juicio, para este menester se inventó la geometría, que pasó luego a Grecia (HERÓDOTO, 1992, págs. 109,3)".
[6] En el papiro se lee 2 *khet*, pero el desarrollo del problema nos obliga a corregir el enunciado.
[7] La lectura no es segura. Se ha propuesto que la superficie es de 2000 **codos cuadrados** en vez de 20 **setjat**, que se transformarían en 40 **ta** al multiplicar el valor del área por 2 (COUCHOUD, 1993, pág. 49), por lo que la medida de los catetos estaría en decenas de codo.
[8] La edificación de este recinto templario comenzó el 23 de agosto de 237 a.C. bajo el patrocinio de Ptolomeo III Evergetes (Πτολεμαίος Ευεργέτης – 282-22 a.C), pero el núcleo central de la obra se llevó a cabo durante el reinado de Ptolomeo IV Filopator (Πτολεμαίος Φιλοπάτωρ – 221-203 a.C). Sus trabajos concluyeron con Ptolomeo XII Neo Dionisio (Πτολεμαίος Νέος Διόνυσος – 112-51 a.C) en el año 57 a.C.
[9] En la inscripción se lee 659 1/8.
[10] Una fórmula similar fue utilizada por los matemáticos chinos en el siglo XIII

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{a^2c^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}$$

[11] Considerando que m = BF = BG = GE = FE, AD= DE = FE/2, CG = GE/2 y D = 2 FE la fórmula queda reducida a 15 $a^2/8$, 1 3/4 veces el área del cuadrado propuesto. La comprobación de que la fórmula de Lepsius es correcta es sencilla, bastará con sumar el área del triángulo BAF (AF.BF/2) más la del trapecio rectángulo FBCE [(BF+CE/2).BG] más la del triángulo CED (DE.CE/2), lo que numéricamente es sencillo.
En la fórmula

$$\frac{8+4}{2}.\frac{4+5}{2} = 27$$

Como suma de polígonos

$$\frac{2.4}{2} + \frac{4+5}{2}.4 + \frac{2.5}{2} = 4 + 5 + 18 = 27$$

[12] En la inscripción se lee 3.
[13] Los números entre corchetes han sido restaurados por Lepsius con los restos de la inscripción (1856, pág. 90).

[14] Los valores dados para los lados del cuadrilátero, 2 1/2 1/4 para la base y 1 2/3 para la altura no son coincidentes con los aplicados en la fórmula para calcular su área (3-2/7)(2-2/7). Hemos puesto como dimensiones el rectángulo las extraídas de estas restas.