Aprender las matemáticas egipcias

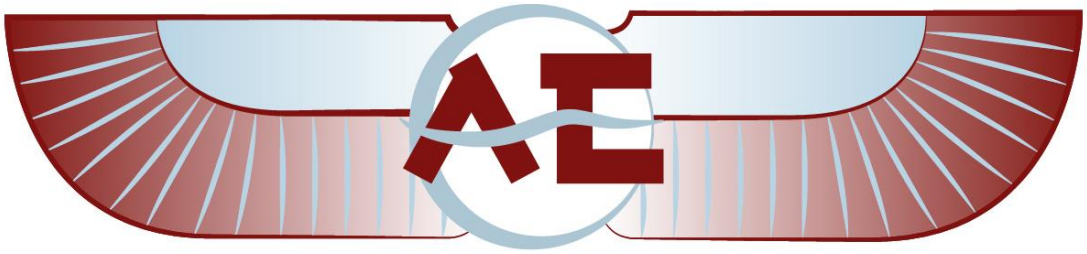
Ángel Sánchez Rodríguez

2014

Índice

Índice I
El "álgebra" en Egipto 99
Los problemas de completar hasta la unidad 99
Problema 21 del PMR 99
Problema 22 del PMR 100
Problema 23 del PMR 101
Los problemas *ḥʿw* 'cantidad' 103
Problema 24 del PMR 103
Problema 25 del PMR 105
Problema 26 del PMR 106
Problema 27 del PMR 107
Problema 4 del PK 108
Problema 30 del PMR 109
Problema 31 del PMR 110
Problema 32 del PMR 112
Problema 33 del PMR 115
Problema 34 del PMR 118
Los problemas de pensar un número 119
Problema 28 del PMR 120
Problema 29 del PMR 122
Los problemas de *hqꜣt* 123
Problema 35 del PMR 123
Problema 36 del PMR 125

Problema 37 del PMR....127
Problema 38 del PMR....130
Los problemas de "álgebra" del PMM....133
Problema 25 del PMM....133
Problema 19 del PMM....133
Resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas....134
Problema 1 del PB....134
Problema 2 del PB....136
Problema 7 del Papiro matemático demótico....139
Los problemas *b3kw* 'tasas'....140
Problema 67 del PMR....141
Problema 11 del PMM....142
Problema 23 del PMM....143
Problema 6 del PK....143



Amigos de la Egiptología

www.egiptologia.com

El "álgebra" en Egipto

El vocablo "álgebra" proviene del árabe الـجـبر **al-ŷarabi** que significa 'reintegración' y se encuentra por primera vez en la literatura en la obra Al-kitāb al-mukhtaṣar fi ḥisāb **al-ŷarabi** wa?l-muqābala (Compendio de cálculo por reintegración y comparación) del matemático árabe **Muhammad ibn Musa al-Jwarizmi**, más conocido como **Al Juarismi**.

En Egipto no se puede hablar de "álgebra" propiamente dicha, pues sus matemáticos no utilizaron ningún tipo de nomenclatura (igualdades, incógnitas,...), pero fueron capaces de resolver problemas que para nosotros estarían encuadrados dentro del grupo de ecuaciones de primer grado o de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, alguna de ellas de segundo grado.

Los problemas de completar hasta la unidad

Los primeros ejemplos equivalentes a nuestro "álgebra" son problemas en los que se pide la cantidad que falta para llegar a la unidad (problemas 21 y 22 del PMR) o a 2/3 (problema 23).

En términos generales estos ejercicios podrían resolverse mediante sumas y restas. Si los hemos incluido aquí es por el hecho de que los egipcios aplican un procedimiento más parecido a una ecuación de primer grado con una incógnita que a un problema básico de sumas y restas.

Problema 21 del PMR

¿Qué cantidad completa 2/3 1/15 para llegar a 1?

El planteamiento algebraico moderno es

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{15}+x=1$$

... de fácil resolución tomando como m. c. m. 15 (el escriba utiliza el mismo valor como base).

$$\frac{10}{15}+\frac{1}{15}+\frac{15x}{15}=\frac{15}{15}$$

$$15x=4$$

$$x=\frac{4}{15}=\frac{1}{5}+\frac{1}{15}$$

Es la misma división que realiza el escriba. Antes de llegar a esta división el matemático tiene que encontrar la fracción a dividir usando un número base m = 15.

$$10+1+y=15$$

... de donde deduce con facilidad que le quedan los 4/15.

1	**1/10**	**1/5**	**1/15**	
15	1 1/2	3	1	**4**

La prueba (*tp n sjty*) es sencilla tomando como valor base el 15.

2/3	**1/15**	**1/5**	**1/15**	**1**
10	1	3	1	15

Para eliminar la duplicación 1/15 1/15 se ha sugerido la utilización de la tabla 2/n del PMR . (ROBINS, 1987, pág. 20).

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$$

Problema 22 del PMR

¿Qué cantidad completa 2/3 1/30 para llegar a 1?

El planteamiento algebraico moderno es

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{30}+x=1$$

... de fácil resolución tomando como m. c. m. 30.

$$\frac{20}{30}+\frac{1}{30}+\frac{30x}{30}=\frac{30}{30}$$

$$30x=9$$

$$x = \frac{9}{30} = \frac{3}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$$

Es la misma división que realiza el egipcio. Antes de llegar a esta división el escriba tiene que encontrar la fracción a dividir usando un número base m = 30 (nuestro m. c. m.).

$$20 + 1 + y = 30$$

... de donde deduce con facilidad que le quedan los 9/30.

1	**1/10**	**1/5**	
30	3	6	**9**

La prueba es sencilla tomando como valor base m = 30.

2/3	**1/30**	**1/5**	**1/10**	**1**
20	1	6	3	30

Problema 23 del PMR

¿Qué cantidad completa 1/4 1/8 1/10 1/30 1/45 para llegar a 2/3?

El planteamiento algebraico moderno es

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} + \frac{1}{45} + x = \frac{2}{3}$$

... de fácil resolución tomando como m. c. m. 360.

$$\frac{90}{360} + \frac{45}{360} + \frac{36}{360} + \frac{12}{360} + \frac{8}{360} + \frac{360x}{360} = \frac{240}{360}$$

$$360x = 49$$

$$x = \frac{49}{360} = \frac{1}{9} + \frac{1}{40}$$

El matemático egipcio utiliza un número base m = 45, el denominador de mayor valor, la octava parte del m. c. m. El matemático egipcio utiliza un número base m = 45, el denominador de mayor valor, la octava parte del m. c. m.

$$\frac{45}{4} + \frac{45}{8} + \frac{45}{10} + \frac{45}{30} + \frac{45}{45} + 45x = \frac{90}{3}$$

... que simplificada queda

$$11\frac{1}{4} + 5\frac{5}{8} + 4\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + 1 + 45x = 30$$

... que es lo que marca el escriba en el PMR en series de fracciones de numerador unitario según la tabla

1	1/4	1/8	1/10	1/30	1/45	
45	11 1/4	5 1/2 1/8	4 1/2	1 1/2	1	23 1/2 1/4 1/8

Resolveremos las fracción 5/8.

$$\frac{5}{8}=\frac{(4+1)}{8}=\frac{4}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$$

El resultado de la suma quedaría en la nomenclatura moderna

$$23+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+45x=30$$

Para alcanzar el valor 30, el segundo miembro, necesita 6 1/8, la resta.

$$45x=6\frac{1}{8}$$

Ahora basta con realizar la división

1	**45**
1/45	1
1/360	1/8
1/10 1/30 [48/360]	6
1/9 1/40 (1/10 1/30 1/360) [49/360]	**6 1/8**

Explicamos la cuarta fila.

$$\frac{6}{45}=\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$$

... según la tabla 2/n del PMR.

¿Cómo se llega al resultado que aporta el matemático? El PMR no nos informa de ello. Estamos tentados de pensar que tomaría como resultado 1/10 1/30 1/360 ▫ 49/360, lo que provoca

$$\frac{49}{360}=\frac{(40+9)}{360}=\frac{40}{360}+\frac{9}{360}=\frac{1}{9}+\frac{1}{40}$$

... el resultado del escriba. Pero es más lógico que tomara como base m ▫ 360.

1	360
1/9	40
1/40	9
1/9 1/40	49

La prueba resulta sencilla, a las cantidades dadas en el problema se añade la solución del mismo (para sumar 2/3) y 1/3 para completar la unidad.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{40}+\frac{1}{45}+\frac{1}{3}=1$$

El matemático utiliza como base m ▫ 45.

1/4	1/8	1/9	1/10	1/30	1/40	1/45	1/3
11 1/4	5 1/2 1/8	5	4 1/2	1 1/2	1 1/8	1	15

... cuya suma es 45.

Los problemas ḥʿw 'cantidad'

Es un grupo de ejercicios en los que se pide calcular la cantidad que debe ser añadida a una fracción de ella para alcanzar una cantidad determinada.

En las matemáticas actuales se trataría de la resolución de una ecuación de primer grado con una incógnita del tipo $x + ax = b$, donde a es una fracción y b, un entero positivo (natural).

Para resolverlas el escriba utiliza el método llamado de la **falsa posición**, muy utilizado por el matemático griego Diofanto de Alejandría (Διόφαντος – siglo III d.C.). Se trata de un procedimiento aritmético que permite resolver ecuaciones de primer grado. Se da un valor cualquiera a la incógnita y se aplica la ecuación. Si coincidiera con el resultado habríamos llegado al final y tendríamos que la incógnita vale el valor asignado, pero eso no es lo habitual. En el resto de los casos el ejercicio se resuelve mediante la proporción

$$\frac{valor\ buscado}{valor\ asignado}=\frac{resultado\ real}{resultado\ ficticio}$$

Diofanto de Alejandría

Διόφαντος

Matemático griego que vivió durante los primeros años del siglo III d.C.

Desarrolló las ecuaciones diofánticas, generalmente de variables, con números enteros.

Escribió un tratado de 13 volúmenes llamado Arithmetica.

Problema 24 del PMR

Si a una cantidad le añadimos su séptima parte se convierte en 19 ¿cuál es dicha cantidad?

La ecuación se podría plantear con la notación algebraica moderna como sigue

$$\left(1+\frac{1}{7}\right)x = 19$$

Operando

$$\frac{8x}{7} = 19$$

... o lo que es lo mismo

$$x = \frac{19}{1+\frac{1}{7}}$$

El método aplicado para su resolución es semejante al actual. Utiliza como base m = 7, el m. c. m., para descomponer nuestro primer miembro y calcular su valor equivalente.

1	**7**
1/7	1
1 1/7	**8**

Ahora divide 19 entre 8, con lo que calcula el valor de la séptima parte.

$$\frac{x}{7} = \frac{19}{8}$$

La aplicación del método de la **falsa posición**.

1	**8**
2	16
1/2	4
1/4	2
1/8	1
2 1/4 1/8	**19**

... que multiplica por 7.

1	**2 1/4 1/8**
2	4 1/2 1/4
4	9 1/2
7	**16 1/2 1/8**

La prueba es sencilla basta con sumar esta cantidad a su séptima parte, el valor obtenido en la tabla superior, para que de 19.

$$\left(16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)+\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=19$$

Problema 25 del PMR

Si a una cantidad le añadimos su mitad se convierte en 16 ¿cuál es dicha cantidad?

La ecuación se podría plantear con la notación algebraica moderna como sigue

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)x=16$$

Operando

$$\frac{3x}{2}=16$$

... o lo que es lo mismo

$$x=\frac{16}{1+\frac{1}{2}}$$

El procedimiento es el mismo que en el problema anterior. Utiliza como base m = 2, el m. c. m., para descomponer el primer miembro y calcular su valor equivalente.

1	**2**
1/2	1
1 1/2	**3**

Ahora divide 16 entre 3, con lo que calcula el valor de la mitad de la cantidad pedida.

$$\frac{x}{2}=\frac{16}{3}$$

Aplicación de la <u>falsa posición</u>.

1	**3**
2	6
4	12
2/3	2
1/3	1
5 1/3	**16**

El cociente de esta división se multiplica por 2 para alcanzar la respuesta al ejercicio.

1	**5 1/3**
2	**10 2/3**

La prueba no tiene ninguna complejidad.

$$\left(10+\frac{2}{3}\right)+\left(5+\frac{1}{3}\right)=\mathbf{16}$$

Problema 26 del PMR

Si a una cantidad le añadimos su cuarta parte se convierte en 15 ¿cuál es dicha cantidad?

La ecuación se podría plantear con la notación algebraica moderna como sigue

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)x=15$$

... o lo que es lo mismo

$$x=\frac{15}{1+\frac{1}{4}}$$

Operando

$$\frac{5x}{4}=15$$

El procedimiento es el mismo que en los problemas anteriores. Utiliza como base m = 4, el m. c. m., para descomponer el primer miembro y calcular su valor equivalente.

1	**4**
1/4	1
1 1/4	**5**

Ahora divide 15 entre 5, con lo que calcula el valor de la cuarta parte de la cantidad pedida.

$$\frac{x}{4}=\frac{15}{5}$$

Aplicación de la **falsa posición**.

1	**5**
2	10
3	**15**

Ahora multiplica por 4 para resolver la ecuación.

1	**3**
2	6
4	**12**

La prueba es muy fácil.

$$12 + 3 = \mathbf{15}$$

Problema 27 del PMR

Si a una cantidad le añadimos su quinta parte se convierte en 21 ¿cuál es dicha cantidad?

La ecuación se podría plantear con la notación algebraica moderna como sigue

$$\left(1 + \frac{1}{5}\right)x = 21$$

Operando

$$\frac{6x}{5} = 21$$

... o lo que es lo mismo

$$x = \frac{21}{1 + \frac{1}{5}}$$

El procedimiento es el mismo que en los problemas anteriores. Utiliza como base m = 5, el m. c. m., para descomponer el primer miembro y calcular su valor equivalente.

1	**5**
1/5	1
1 1/5	**6**

Ahora divide 21 entre 6, con lo que calcula el valor de la quinta parte.

$$\frac{x}{5} = \frac{21}{6}$$

Aplicación de la **falsa posición**.

1	**6**
2	12
1/2	3
3 1/2	**21**

Para finalizar multiplica por 5.

1	**3 1/2**
2	7
4	14
5	**17 1/2**

De nuevo verifica la respuesta con la prueba sumando el valor obtenido a su quinta parte.

$$\left(17+\frac{1}{2}\right)+\left(3+\frac{1}{2}\right)=21$$

Problema 4 del PK

En el fragmento LV.3 (UC 32143A) hay un ejercicio de "álgebra" escrito en hierático en columnas. Sus dos primeras líneas están alteradas, pero con la parte conservada puede restaurarse sin dificultad el ejercicio completo. Se podría enunciar de la siguiente forma

¿Cuál es la cantidad que restada a su mitad y a su cuarta parte se convierte en 5?

La ecuación planteada en la notación algebraica moderna es

$$\left[1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\right]x=5$$

$$x=\frac{5}{1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)}$$

$$x=20$$

El matemático comienza efectuando la resta del corchete obteniendo el valor 1/4. Esta operación pudo realizarla en dos fases: primero restó 1/2 de 1, lo que se convierte en 1/2 y, luego, restó 1/4 de 1/2, transformándose en 1/4.

Como es habitual en este tipo de problemas, el siguiente paso es el cálculo del inverso de 1/4 siguiendo el procedimiento de los **inversos cruzados**.

1	**1/4**
4	1

Simplemente queda multiplicar 4 por 5 para obtener la respuesta al ejercicio: el número es 20.

Un aumento en la complejidad se observa en los problemas 30-33 del PMR donde se cambia la metodología, de ahí que sean llamados problemas de divisiones por expresiones fraccionarias (CLAGETT, 1999, pág. 143).

Problema 30 del PMR

¿Cuál es la cantidad cuyas dos terceras partes sumadas a su décima parte se convierten en 10?

La ecuación se podría plantear con la notación algebraica moderna como sigue

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{10}\right)x = 10$$

Operando

$$\frac{23x}{30} = 10$$

... o lo que es lo mismo

$$x = \frac{10}{\frac{2}{3}+\frac{1}{10}}$$

El egipcio no aplica el método de la **falsa posición** en este ejercicio. Simplemente realiza la división 10 entre 2/3 1/10.

1	**2/3 1/10**
2	1 1/3 1/5
4	3 1/15
8	6 1/10 1/30
13	**9 2/3 1/5 1/15 1/30**

Es necesario explicar los resultados de algunos factores, el 4 y el 8.

La línea del factor 4 se deduce del siguiente modo: el doble de 1 1/3 1/5 es 2 2/3 2/5. Como conocemos por la tabla 2/n que 2/5 es 1/3 + 1/15, se aprecia con claridad que

$$2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5} = 2+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15} = 3+\frac{1}{15}$$

La línea del factor 8 es deducible de la tabla 2/n del PMR donde se estable la equivalencia entre 2/15 y 1/10 1/30.

Observamos como al sumar 13 en la columna de la izquierda el valor obtenido en la derecha no es 10, sin menor (9 29/30), por lo que es necesario calcular el resto.

Sumemos, primero, los valores de los factores1, 4 y 8.

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+3+\frac{1}{15}+6+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}=9+\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{2}{15}$$

$$9+\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{3}{15}=9+\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=9+\frac{29}{30}$$

Falta 1/30 para obtener el valor 10 del dividendo, lo que se obtiene aplicando el método de los **inversos cruzados**.

1	**2/3 1/10**
10	7 2/3
30	23
1/23	**1/30**

La cantidad que pide el ejercicio es 13 1/23.

Efectúa la prueba

1	**13 1/23**
2/3	8 2/3 1/46 1/138
1/10	1 1/5 1/10 1/230
2/3 1/10	**10**

¿Cómo calcula el matemático los 2/3 de 1/23? El producto de ambas fracciones es 2/69, valor que hay que buscar en la tabla 2/n del PMR para hallar la serie de sumandos 1/46 1/138.

En la siguiente fila explicamos la división 13/10.

$$\frac{13}{10}=1+\frac{3}{10}=1+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$$

Problema 31 del PMR

¿Cuál es la cantidad que añadida a sus dos terceras partes, a su mitad y a su séptima parte se convierte en 33?

La ecuación se podría plantear con la notación algebraica moderna como sigue

$$\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)x=33$$

Operando

$$\frac{97x}{42} = 33$$

... o lo que es lo mismo

$$x = \frac{33}{1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}}$$

... el paso realizado por el egipcio teniendo en cuenta para el resultado del factor 4 que

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

1	**1 2/3 1/2 1/7**
2	4 1/3 1/4 1/28 [2/7]
4	9 $1/6^1$ 1/14
8	18 1/3 1/7
1/2	1/2 1/3 1/4 1/14
1/4	1/4 $1/6^2$ 1/8 1/28
14 1/4	**32 1/2 1/7 1/8 1/14 1/28 1/28**

Al duplicar el factor 2 se obtendría el factor 4.

$$8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{14}$$

... de donde

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6}$$

Si sumamos los valores que se corresponden con la suma 14 1/4 en la columna de la derecha obtenemos

$$32 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{28}\right)$$

¿Cuánto falta al paréntesis para llegar a 1/2 y completar 33? Para hallarlo toma como base m = 42.

1	**42**
1/7	6
1/8	5 1/4
1/14	3
1/28	1 1/2
1/28	1 1/2
	17 1/4

Para llegar a 21 que es la mitad de 42 le faltan 3 1/2 1/4 de 42, lo requerido para que el resultado total sume 33.

Lo primero que realiza el matemático egipcio es calcular 1/42 del divisor. Comienza multiplicando 42 por el valor del divisor.

1	**42**
2/3	28
1/2	21
1/7	6
1 2/3 1/2 1/7	**97**[3]

... calculando ahora su inverso por el método de los **inversos cruzados**. Si tenemos 97 partes de 42, 1/42 será 1/97.

97	**42**
1/42	1/97

Basta con multiplicar el valor de 1/42 por 3 1/2 1/4 cuarenteavos que era la cantidad que faltaba.

1	**1/97**
2	1/56 1/679 1/776 [2/97 del PMR]
1/2	1/194
1/4	1/388
3 1/2 1/4	**1/56 1/97 1/194 1/388 1/679 1/776**

Por lo que la cantidad que soluciona el ejercicio es

$$14+\frac{1}{4}+\frac{1}{56}+\frac{1}{97}+\frac{1}{194}+\frac{1}{388}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$$

Respuesta muy compleja.

Problema 32 del PMR

¿Cuál es la cantidad que añadida a su tercera parte y a su cuarta parte se convierte en 2?

La ecuación se podría plantear con la notación algebraica moderna como sigue

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x=2$$

Operando

$$\frac{19x}{12}=2$$

... o lo que es lo mismo

$$x = \frac{2}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$$

Se sigue el procedimiento de los ejercicios anteriores, realizar la división.

1	**1 1/3 1/4**	**228 de 144**
2/3	1 1/18	152
1/3	1/2 1/36	76
1/6	1/4 1/72	38
1/12	1/8 1/144	19
1/228	1/144	1
1/114	1/72	2
1 1/6 1/12 1/114 1/228	**2**	

Para justificar las dos últimas fracciones es necesario calcular el remanente de la división

1	**1 1/3 1/4**
2/3	1 1/18
1/3	1/2 1/36
1/6	1/4 1/72
1/12	1/8 1/144
1 1/6 1/12	**1 1/2 1/3 1/8 1/72 1/144**

Aplica el número base m = 144[4], el "denominador" mayor de la columna de la derecha hasta ese momento.

1	144
1/2	72
1/3	48
1/8	18
1/72	2
1/144	1
	285

Faltan 3 partes de 144 para alcanzar 288 (2 por 144). En realidad 1/144 + 1/72 como se muestra en los datos aportados por el escriba.

Explicaremos el factor 1/228 tomando como base m = 144, el mismo valor anterior.

1	144
1/2	72
1/4	36
2/3	96
1/3	48
1 1/3 1/4	228

Esto implica que multiplicando 144 por 1 1/3 1/4 obtenemos 228.

1	**144**
1/3	48
1/4	36
1 1/3 1/4	**228**

Aplicando el procedimiento de los **inversos cruzados**

1	1 1/3 1/4
144	228
1/228	1/144
1/114	1/72

... quedan explicadas las dos últimas fracciones.

El resultado completo del ejercicio es

$$1+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{144}+\frac{1}{228}$$

La prueba se hace tediosa por los altos valores de los denominadores.

1	**1 1/6 1/12 1/114 1/228**
2/3	2/3 1/9 1/18 1/171 1/342
1/3	1/3 1/18 1/36 1/342 1/684
1/2	1/2 1/12 1/24 1/228 1/456
1/4	1/4 1/24 1/48 1/456 1/912
1 1/3 1/4	**2**

El egipcio separa los números grandes por un lado

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

... y las pequeñas fracciones por otro para completar el 1/4 que falta.

Para conseguirlo toma como base m = 912, el denominador mayor, que aplica a las fracciones inferiores a 1/6.

1	**912**
1/12	76
1/114	8
1/228	4
1/18	50 2/3
1/36	25 1/3
1/342	2 2/3
1/684	1 1/3
1/24	38

1/48	19
1/456	2
1/912	1
	228

Se observa que 228 es la cuarta parte de 912. Aún así se hace la suma completa: los valores obtenidos con las grandes fracciones y los de las pequeñas utilizando el mismo número base m = 912, para obtener 1824, el doble (valor 2).

1	**912**
1/2	456
1/4	228
1/4	228
2	**1824**

Problema 33 del PMR

¿Cuál es la cantidad que añadida a sus dos terceras partes, a su mitad y a su séptima parte se convierten en 37?

El problema es parecido a 31 donde el segundo miembro de la ecuación era 33 en vez de 37.

La ecuación se podría plantear con la notación algebraica moderna como sigue

$$\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)x = 37$$

Operando

$$\frac{97x}{42} = 37$$

... o lo que es lo mismo

$$x = \frac{37}{1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}}$$

Dividiendo

1	**1 2/3 1/2 1/7**
2	4 1/3 1/4 1/28 [2/7]
4	9 1/6 1/14
8	18 1/3 1/7
16	**36 2/3 1/4 1/28 [2/7]**

El dividendo, último valor de la columna de la derecha no alcanza el valor 37. ¿Cuánto falta?

Se toma como base m = 42.

1	**42**
2/3	28
1/2	21
1/4	10 1/2
1/28	1 1/2
2/3 1/2 1/28	**40**

Faltan 2/42, o lo que es equivalente 1/21 para alcanzar el valor 37 del dividendo.

Si consideramos el divisor completo

$$1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$$

... manteniendo el mismo número base m = 42 obtenemos 97 (42 + 28 + 21 + 6).

1	**42**
2/3	28
1/2	21
1/7	6
1 2/3 1/2 1/7	**97**

Lo que significa que 97 entre 42 da 1 2/3 1/2 1/7, por lo que aplicando el método de los **inversos cruzados**

1	1 2/3 1/2 1/7
42	97
1/97	1/42
1/56 1/679 1/776 [2/97]	1/21

Valor que tenemos que añadir a la división para completar el ejercicio.

$$16+\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$$

Ahora realiza la prueba de verificación utilizando como número base m = 5432, producto de multiplicar el denominador más alto del resultado (776) por el denominador más alto del enunciado (7).

1	16	1/56	1/679	1/776		
		97	**8**	**7**		112
2/3	10 2/3	1/84	1/1358	1/4074	1/1164	
		64 2/3	**4**	**1 1/3**	**4 2/3**	74 2/3
1/2	8	1/112	1/1358	1/552		
		48 1/2	**4**	**3 1/2**		56
1/7	2 1/4	1/392	1/4753	1/5432		

	1/28			15 1/2 1/4 1/7 1/14 1/28
		13^5 1/2 1/4 1/14 1/28	**1 1/7**	**1**
	36 2/3 1/4 1/28			**258 2/3**

Para calcular los 2/3 de 1/679 aplica la regla

$$\frac{1}{3n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n}$$

$$\frac{1}{3x679} = \frac{1}{2x679} + \frac{1}{6x679} = \frac{1}{1358} + \frac{1}{4074}$$

La versatilidad del escriba se pone de manifiesto en este ejercicio.

¿Cómo calcula el equivalente de la fracción 1/392? Dividiendo 5432 entre 392.

1	**392**
2	784
10	3920
1/2	196
1/4	98
1/7	56
1/14	28
1/28	14
13 1/2 1/4 1/14 1/28	**5432**

Ahora aplica el valor base m = 5432 a los valores de la celda marcada de la tabla de prueba, suma de la segunda columna.

36 2/3	**1/4**	**1/28**
3621 1/3	1358	194

Para alcanzar el dividendo 37 falta 1/28 1/84 (37 – 36 2/3 1/4 1/28), lo que le falta a 2/3 1/4 1/28 para alcanzar la unidad, o lo que es lo mismo a 1/4 1/28 para llegar a 1/3.

Es posible que el escriba lo realizara tomando como base m = 28.

1	**28**
2/3	18 2/3
1/4	7
1/28	1
1 2/3 1/4 1/28	**26 2/3**

Falta 1 1/3 para alcanzar la unidad (28).

1	**28**
1/28	1
1/84	1/3
1/28 1/84	**1 1/3**

Ahora aplica el valor base inicial, m = 5432 al remanente

1	**5432**
1/28	194
1/84	64 2/3
1/28 1/84	**258 2/3**

... y al dividendo de la división (37) sin remanente.

1	**5432**
2/3	3621 1/3
1/2	2716
1/4	1358
1/28	194
2/3 1/4 1/28	**5173 1/3**

La suma de ambos, el valor sin remanente más el remanente tiene que dar 5432 (5173 1/3 más 258 2/3).

Problema 34 del PMR

¿Cuál es la cantidad que añadida a su mitad y a su cuarta parte se convierte en 10?

La ecuación se podría plantear con la notación algebraica moderna como sigue

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)x = 10$$

Operando

$$\frac{7x}{4} = 10$$

... o lo que es lo mismo

$$x = \frac{10}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$$

Se realiza la división

1	**1 1/2 1/4**
2	3 1/2
4	7

1/7	1/4
1/4 1/28 [2/7]	1/2
1/2 1/14	1
5 1/2 1/7 1/14	**10**

Observamos como realiza la duplicación en la columna de la derecha. De 1/4 pasa a 1/2 y de 1/2 a 1.

En este caso no hay remanente. El resultado es

$$5+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}$$

La prueba es sencilla comparada con algún de los ejemplos anteriores.

1	**5 1/2 1/7 1/14**
1/2	2 1/2 1/4 1/14 1/28
1/4	1 1/4 1/8 1/28 1/56

La suma de los enteros y de las fracciones mayores a 1/8 excluyendo 1/7 (fracción de difícil operación) es 9 1/2 1/8, valor al que le falta 1/4 1/8 para completar 10.

Al resto de las fracciones se le aplica el número como base m = 56, valor del mayor denominador.

1/7	1/14	1/14	1/28	1/28	1/56	
8	**4**	**4**	**2**	**2**	**1**	**21**

Ahora hay que demostrar que 1/4 1/8 aplicados a 56 da 21.

1/4	1/8	
14	**7**	**21**

Lo que se cumple.

Los problemas de pensar un número

Son una variante de los anteriores algo más compleja en la que a la suma de una cantidad con una fracción de la misma se le sustrae una porción de la suma para alcanzar un resultado concreto. Chace considera que su resolución se lleva a cabo por el método de falsa posición "asumiendo el producto de sus denominadores como respuesta" (1927, pág. 26) .

Este nombre tan gráfico proviene de su semejanza con los juegos matemáticos que suelen hacer los niños en el patio del colegio.

Piensa un número, súmale una cantidad, resta otra y dime el resultado. El número que has pensado es...

Problema 28 del PMR

Si a una cantidad se le añaden sus dos tercios y se le quita la tercera parte de la suma de ambos se convierte en 10 ¿de qué cantidad hablamos?

La notación algebraica moderna sería

$$\left(x+\frac{2x}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(x+\frac{2x}{3}\right)=10$$

Veamos la forma de calcular el ejercicio.

$$\left(x+\frac{2x}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(x+\frac{2x}{3}\right)=y$$

$$\frac{10x}{9}=y$$

$$x=\frac{9}{10}y$$

Solamente hay que multiplicar el resultado por 9/10, o lo que es lo mismo calcular la décima parte y restarla, procedimiento que sigue el escriba al principio del ejercicio como exponemos a continuación.

Lo primero es calcular la 1/10 de 10, 1, y restarlo del resultado de la ecuación (10 − 1 = 9). Esa es la cantidad buscada.

¿Cómo llega el matemático a esta solución?

En vez de aplicar el procedimiento de los problemas *ḥ ʿw* de la **falsa posición**, dividiendo por 10 y multiplicando por 9, va a suponer que 9, el "denominador" mayor

$$x+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x-\frac{1}{9}x=y$$

... es la resta de 10 menos 1.

$$\left(\frac{10x}{10-1}\right)=10$$

Ahora divide entre10 y multiplica por 9 (10 menos 1), obteniendo el resultado del ejercicio, 9.

Se ha propuesto como metodología restar a cada miembro de la ecuación inicial su décima parte después de reducir las fracciones (COUCHOUD, 2004, pág. 118). Así

$$\left(x+\frac{2x}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(x+\frac{2x}{3}\right)=y$$

$$\frac{10x}{9}=10$$

$$\frac{10x}{9}-\frac{1}{10}\left(\frac{10x}{9}\right)=10-\left(\frac{1}{10}.10\right)$$

$$x=9$$

El problema en jerga coloquial se resumiría en **piensa un número, calcula sus dos terceras partes y súmalo. Ahora lo divides entre tres y réstalo de lo anterior.** Esperamos la respuesta y le diremos el número correspondiente multiplicando el que nos diga por 9/10.

Es fácil observar que el método se cumple para los múltiplos de 9.

Pongamos un ejemplo. El maestro dice al alumno '**piensa un número múltiplo de 9 y no me lo digas**'. El muchacho piensa el 18. Continúa el maestro

1. Calcula sus dos tercios y súmalo (los 2/3 de 18 son 12; 18 más 12 dan 30).

2. Divide el resultado por tres y réstalo de lo anterior (30 entre 3 es 10; 30 menos 10 da 20).

3. Calcula la décima parte y réstala (la décima parte de 20 es 2; 20 menos 2 es 18).

4. El número que has pensado es 18.

El resto de los datos aportados por el egipcio en el papiro parecen la prueba. Calcula los 2/3 de 9 que son 6, cantidad que suma a la original obteniendo 15.

$$\left(x+\frac{2x}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(x+\frac{2x}{3}\right)=10$$

Halla la tercera parte de la suma, obteniendo 5 (15 entre 3).

$$\left(x+\frac{2x}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(x+\frac{2x}{3}\right)=10$$

Al restar ambas cantidades se obtiene el resultado, 10 (15 menos 5).

Problema 29 del PMR

Si a una cantidad se le añaden sus dos tercios y la tercera parte de la suma de ambos, la tercera parte del total se convierte en 10 ¿de qué cantidad hablamos?

La notación algebraica moderna sería

$$\frac{1}{3}\left[\left(x+\frac{2x}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(x+\frac{2x}{3}\right)\right]=10$$

Veamos la forma de calcular el ejercicio.

$$\frac{1}{3}\left[\left(x+\frac{2x}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(x+\frac{2x}{3}\right)\right]=y$$

$$\frac{20x}{27}=y$$

$$x=\frac{27}{20}y$$

En el PMR falta la parte inicial del problema, pero es fácilmente deducible por del contexto y teniendo como referencia el problema anterior. Es probable que en ella el escriba asumiera un valor base de m = 27, el valor del denominador de nuestra ecuación.

1	**27**
2/3	18
1/3	9
1 2/3	**45**

Las equivalencias del primer y segundo sumando son

1 2/3	**45**
1/3 de 1 2/3	15

La suma del corchete es 60 (45 + 15) y su tercera parte 20.

Ahora en vez de aplicar el procedimiento utilizado en los problemas *ḥ*w*, dividiendo 10 entre 20 y multiplicándolo por 27, opta por efectuar, al parecer, lo contrario, dividir 27 entre 20 y multiplicarlo por 10, paso que muestra el escriba en el papiro.

Sigamos el proceso completo. Dividimos 27 entre 20.

1	**20**
1/2	10
1/4	5
1/10	2
1 1/4 1/10	**27**

...valor que multiplica por 10, el paso mostrado por el escriba en el PMR.

1	**10**
1/4	2 1/2
1/10	1
1 1/4 1/10	**13 1/2**

La respuesta es 13 1/2.

Ahora se realiza la prueba siguiendo los datos del ejercicio como vienen en el papiro.

	1	**13 1/2**
	2/3	9
Suman		22 1/2
	1/3 (1 2/3)	7 1/2
Suman		30
	2/3	20
	1/3	**10**

De forma coloquial el problema podría expresarse **piensa un número, calcula sus dos terceras partes y súmalo. Ahora lo divides entre tres y sumas lo anterior. El conjunto lo divides entre 3**. Esperamos la respuesta y le diremos el número correspondiente multiplicando el que nos diga por 27/20.

Sería válido para los múltiplos de 27.

Los problemas de *hq3t*

Es una variante de los anteriores en la que se solicita como respuesta la cantidad que debe llevar una cesta de grano tras varios viajes con ella llena para completar un recipiente.

Problema 35 del PMR

Descendí tres veces llevando una cesta añadiendo una tercera parte de la misma para completar un recipiente de grano de 1 heqat ¿Cuál es la cantidad de la cesta?

El planteamiento algebraico moderno es

$$\left(3+\frac{1}{3}\right)x=1$$

... de fácil resolución tomando como mínimo común múltiplo 3.

$$\left(\frac{9}{3}+\frac{1}{3}\right)x=1$$

$$\frac{10}{3}x=1$$

... o lo que es lo mismo

$$x=\frac{1}{3+\frac{1}{3}}$$

Se realiza la división

1	**3 1/3**
1/10	1/3
1/5	2/3
1/5 1/10	**1**

La capacidad de la cesta es 1/5 1/10 de **heqat**. Se verifica de la siguiente manera

1	**1/5 1/10**
2	1/2 1/10
1/3	1/10
3 1/3	**1**

Explicaremos los factores 2 y 1/3. Podríamos pensar que el matemático utilizaría la tabla 2/n del PMR para resolver el factor 2

$$2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{5}$$

... pero no lo aplica. Sigue un procedimiento diferente para conseguir una serie de dos sumandos en vez de tres.

$$2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)=\frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5}x\frac{2}{2}=\frac{6}{10}=\frac{5+1}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$$

... que el escriba realiza dividiendo.

1	**5**
1/2	2 1/2
1/5	1
1/10	1/2
1/2 1/10	**3**

Es una prueba de la versatilidad del escriba.

Para el factor 1/3 solamente hay que ir a la tabla 2/n.

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{30}=\frac{1}{10}$$

El problema continúa expresando el resultado en **ro** 1/320 de un **heqat**, multiplicando las fracciones obtenidas por 320.

1	**320**
1/10	32
1/5	64
1/5 1/10	**96**

Se comprueba el resultado

1	**96**
2	192
1/3	32
3 1/3	**320**

Problema 36 del PMR

Descendí tres veces llevando una cesta añadiendo una tercera parte y una quinta parte de la misma para completar un recipiente de grano de 1 heqat ¿Cuál es la cantidad de la cesta?

El planteamiento algebraico moderno es

$$\left(3+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)x=1$$

... de fácil resolución tomando como mínimo común múltiplo 15.

$$\left(\frac{45}{15}+\frac{5}{15}+\frac{3}{15}\right)x=1$$

$$\frac{53}{15}x=1$$

$$x=\frac{15}{53}=\frac{1}{4}+\frac{1}{53}+\frac{1}{106}+\frac{1}{212}$$

Veamos el método del egipcio. El escriba duplica el valor del

"denominador", posiblemente para convertirlo en par lo que genera un auxiliar m = 30.

Aplica este valor al paréntesis 90 + 10 + 6 =106, como si hubiéramos multiplicado los dos miembros de la primera ecuación por 30.

$$30\left(3+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)x = 30$$

$$106x = 30$$

Basta con dividir 30 entre 106.

1	**106**
1/2	53
1/4	26 1/2
1/106	1
1/53	2
1/212	1/2
1/4 1/53 1/106 1/212	**30**

La capacidad de la cesta es 1/4 1/53 1/106 1/212 de **heqat**.

El matemático no conforme con ello lo verifica mediante una prueba algo compleja de entender. Primero aplica el resultado al problema, calculando el valor de nuestro paréntesis.

1	**1/4 1/53 1/106 1/212**
2	1/2 1/30 1/318 1/795 1/53 1/106
1/3	1/12 1/159 1/318 1/636
1/5	1/20 1/265 1/530 1/1060

Los resultados de la segunda línea provienen de dividir por dos los "denominadores" de las fracciones, excepto en el caso de 1/53 cuyo denominador es impar y utiliza la serie obtenida en la tabla 2/n del PMR para 2/53 (1/30 1/318 1/795).

Ahora es necesario demostrar que la suma de los valores obtenidos se corresponde con la unidad, el segundo miembro de nuestra ecuación. Para ello toma el máximo valor, 1060, como referencia, como número base y calcula el equivalente para el resto de los "denominadores" a excepción de 2 y 4.

1/53	**1/106**	**1/212**			
20	10	5			**35**
1/30	**1/318**	**1/795**	**1/53**	**1/106**	
35 1/3	3 1/3	1 1/3	20	10	**70**
1/12	**1/159**	**1/318**	**1/636**		

88 1/3	6 2/3	3 1/3	1 2/3	**100**
1/20	**1/265**	**1/530**	**1/1060**	
53	4	2	1	**60**

Suma todas las equivalencias (35 + 70 + 100 + 60) obteniendo 265, la cuarta parte de 1060.

Ahora suma este valor con las equivalencias de los "denominadores" 2 y 4.

1/2	**1/4**	**1/4**	**1**
530	265	265	**1060**

El resultado queda demostrado.

Problema 37 del PMR

Descendí tres veces llevando una cesta añadiendo una tercera parte, una tercera parte de la tercera parte y una novena parte de la misma para completar un recipiente de grano de 1 heqat ¿Cuál es la cantidad de la cesta?

El planteamiento algebraico moderno es

$$\left(3+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}.\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)x=1$$

$$\left(3+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\right)x=1$$

... o lo que es lo mismo

$$x=\frac{1}{3+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}.\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}$$

... de fácil resolución tomando como mínimo común múltiplo 9.

$$\frac{1}{\frac{27}{9}+\frac{3}{9}+\frac{2}{9}}$$

$$x=\frac{9}{32}=\frac{1}{4}+\frac{1}{32}$$

Lo primero que encontramos es la suma de los valores de nuestro paréntesis inicial.

1	1
2	2
1/3	1/3
1/3 de 1/3	1/9
1/9	1/9
	3 1/2 1/18

El papiro no muestra el procedimiento por el que agrupa las fracciones, pero sin duda habría utilizado la tabla 2/n, según la cuál 2/9 es 1/6 más 1/18.

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$$

Además conoce de otros ejercicios que 1/3 más 1/6 equivale a 1/2.

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{1}{2}+\frac{1}{18}$$

La ecuación propuesta queda transformada según los nuevos datos del egipcio en

$$\left(3+\frac{1}{2}+\frac{1}{18}\right)x=1$$

$$x=\frac{1}{3+\frac{1}{2}+\frac{1}{18}}$$

Ahora efectúa la división.

1	**3 1/2 1/8**
1/2	1 1/2 1/4 1/36
1/4	1/2 1/4 1/8 1/72
1/8	1/4 1/8 1/16 1/144
1/16	1/8 1/16 1/32 1/288
1/32	1/16 1/32 1/64 1/576
1/4 1/32	**1**

La capacidad de la cesta es 1/4 1/32 de **heqat**.

Ahora demuestra que la suma de las fracciones es 1 tomando como número base m = 576, el "denominador" mayor. Separa las fracciones grandes 1/2, 1/4 y 1/8, y aplica el número base al resto.

1/72	**1/16**	**1/32**	**1/64**	**1/576**
8	36	18	9	1

La suma es 72 (8 + 36 + 18 + 9 + 1), que es 1/8 de 576

$$\frac{72}{576} = \frac{1}{8}$$

... que sumado a 1/2 1/4 1/8 da como resultado 1.

De nuevo realiza la verificación de los resultados.

1	**1/4 1/32**
2	1/2 1/16
1/3	1/12 1/96
1/3 de 1/3	1/36 1/288
1/9	1/36 1/288

Tiene que demostrar que los valores de la columna de la derecha suman 1, utilizando como número base m = 288 para sumar todas las fracciones a excepción de las dos más pequeñas, 1/2 y 1/4.

1/32	**1/16**	**1/12**	**1/96**	**1/36**	**1/288**	**1/36**	**1/288**
9	18	24	3	8	1	8	1

La suma es 72, 1/4 de 288

$$\frac{72}{288} = \frac{1}{4}$$

... que añadido a 1/2 1/4 completan 1.

El egipcio decide dar la capacidad de la cesta en **ro**, 1/320 de **heqat**. Para ello el papiro muestra una tabla de conversión de las fracciones de **heqats** de los "denominadores" potencias de 2 hasta el 32, casi todas las que aparecen en el críptico ojo de Horus.

1	**320**
1/2	160
1/4	80
1/8	40
1/16	20
1/32	10
1/4 1/32	**90**

La capacidad de la cesta es de 90 **ro**.

La prueba es sencilla.

1	**90**
2	180
1/3	30
1/3 de 1/3	10
1/9	10
	320

Para completar el problema verifica los resultados en fracciones del ojo de Horus.

1	**1/4 1/32**
2	1/2 1/16
1/3	1/16 1/32
1/3 de 1/3	1/32
1/9	1/32
	1

El trabajo con **ro** es mucho más cómodo, al tratarse de unidades no fraccionarias.

Problema 38 del PMR

Descendí tres veces llevando una cesta añadiendo una séptima parte para completar un recipiente de grano de 1 heqat ¿Cuál es la cantidad de la cesta?

El planteamiento algebraico moderno es

$$\left(3+\frac{1}{7}\right)x = 1$$

Operando

$$\frac{22x}{7} = 1$$

... o lo que es lo mismo

$$x = \frac{1}{3+\frac{1}{7}}$$

Realiza la división

1	**3 1/7**
1/22	1/7
1/11	1/4 1/28 [2/7]
1/6 1/66 [2/11]	1/2 1/14
1/6 1/11 1/22 1/66	**1**

La elección del factor 1/22 parece necesitar una preparación previa porque no parece sencillo ni escogerlo ni calcular su valor.

¿Cómo se obtiene el factor 1/22? Trabajar con fracciones que tienen como "denominador" 7 es complicado por lo que el escriba huye de ello multiplicando por 7. Luego, es suficiente con aplicar el procedimiento de los **inversos cruzados**.

1	**3 1/7**
7	22
1/22	1/7

El resto de los factores son fácilmente asumibles directamente o consultando la tabla 2/n del PMR.

La suma de las celdas marcadas en la columna derecha requieren transformación tomando como valor base m = 28, como denominador mayor. Operación que no muestra el papiro.

1/2	**1/4**	**1/7**	**1/14**	**1/28**	
14	7	4	2	1	28

La solución es

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{22}+\frac{1}{66}\ heqats$$

Ahora efectúa la prueba como en los problemas anteriores.

1	**1/6 1/11 1/22 1/66**
2	1/2 1/11 1/33 1/66
1/7	1/22

Expliquemos el factor 2 en el que 2/11 toma el valor de la tabla 2/n del PMR.

$$\frac{2}{6}+\frac{2}{11}+\frac{2}{22}+\frac{2}{66}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{66}+\frac{1}{11}+\frac{1}{33}=\frac{1}{2}+\frac{1}{11}+\frac{1}{33}+\frac{1}{66}$$

El factor 1/7 se explica arriba por los **inversos cruzados**.

El escriba calcula la capacidad de la cesta en **ro.**

1	**320**
2/3	213 1/3
1/3	106 2/3
1/6	53 1/3
1/11	29 1/11
1/22	14 1/2 1/22
1/66	4 2/3 1/6 1/66
1/6 1/11 1/22 1/66	**101 2/3 1/11 1/22 1/66**

La capacidad es

$$101+\frac{2}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{22}+\frac{1}{66}\ ro$$

El factor 11 se explica dividiendo 11 entre 320, que no se muestra en el PMR.

1	11
10	110
20	220
3	33
9	99
1/11	1
29 1/11	320

Continuamos con la prueba

1	**101 2/3 1/11 1/22 1/66**
2	203 1/2 1/11 1/33 1/66
1/7	14 1/2 1/22
	320

La resolución del factor 1/7 parece complicada, pero el escriba tuvo que deducirla del valor 1/7 de la cesta que se corresponde con 1/22 de *heqat* que utiliza en la primera prueba. Solamente tiene que dividir 320 entre 22.

1	**22**
2	44
4	88
10	220
1/2	11
1/22	1
14 1/2 1/22	**320**

El valor de la suma se alcanza sumando los valores enteros y las fracciones grandes hasta 1/2, obteniendo 319 2/3. Luego suma el resto de fracciones siguiendo el método habitual tomando como base m = 66, el "denominador mayor" para alcanzar el 1/3 que falta.

1/11	**1/11**	**1/22**	**1/22**	**1/33**	**1/66**	**1/66**	
6	6	3	3	2	1	1	22

Obtenemos 22 que es 1/3 de 66, que sumado a 319 2/3 totaliza 320 **ro**.

El siguiente paso que muestra el papiro es trabajar con las fracciones de **heqat** que se escondieron criptográficamente en el ojo de Horus. Primero aproxima el resultado obtenido en el ejercicio a la suma de las fracciones de **heqat**. Así

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{22}+\frac{1}{66}$$

... se aproxima a

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$$

...que suman 100 **ro**. Por lo que faltan 1 2/3 1/11 1/22 1/66 **ro** para alcanzar la capacidad de la cesta.

Verifica el resultado

1	**1/4 1/16 heqats 1 2/3 1/11 1/22 1/66 ro**
2	1/2 1/8 heqats 3 1/21/111/33 1/66 ro
1/7	1/32 heqats 4 1/2 1/22 ro

Los problemas de "álgebra" del PMM

El documento moscovita presenta dos problemas que podríamos encuadrar en la actualidad en el grupo de ejercicios que se resuelven mediante ecuaciones de primer grado con una incógnita. Los presentamos por orden de dificultad, siendo llamativo el problema19 porque la metodología propuesta es muy parecida a la moderna.

Problema 25 del PMM

Si a un cantidad desconocida le añadimos el doble de la misma se convierte en 9 ¿cuál es esa cantidad?

El planteamiento algebraico moderno es

$$x+2x=9$$

... de fácil resolución, *x* vale 3.

El matemático del papiro de Moscú sigue un método que nos resulta muy familiar. Suma 1 más 2 obteniendo 3.

$$3x=9$$

Divide 9 entre 3 para obtener 3, el resultado del ejercicio.

$$x=\frac{9}{3}=3$$

Problema 19 del PMM

Si a una vez y media una cantidad se le añade 4 se convierte en 10 ¿cuál es esa cantidad?

En la notación moderna es una ecuación con una incógnita fácil de plantear.

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)x+4=10$$

Primero resta 10 menos 4 obteniendo 6.

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)x=10-4=6$$

Se calcula el inverso del paréntesis y se multiplica por 6.

$$x=\frac{6}{1+\frac{1}{2}}$$

El inverso de 1 1/2 son 2/3, valor que multiplica por 6 para obtener 4, el resultado del ejercicio.

Resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

Se conocen ejercicios en los que intervienen ecuaciones de segundo grado en cuatro documentos: PK (problema 5), PB (problemas 1 y 2), PMM (problema 6) y el papiro demótico matemático[6] (problemas 7, 15, 16, 18, 34 y 35).

Los dos ejercicios que estudiaremos en este apartado se encuadrarían, según la notación actual, en los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, una de las cuales es de segundo grado.

Estos ejercicios nos aportan información sobre la forma de calcular el área de un cuadrado. Un cuadrado es un paralelogramo, un polígono que tiene lo lados paralelos dos a dos, con los lados iguales y los ángulos iguales de 90º. Su área se calcula multiplicando la medida de su lado por sí misma (lado por lado).

Problema 1 del PB

Se sabe que el área de un cuadrado es de 100 codos cuadrados (una arura) es equivalente a la suma de las áreas de dos cuadrados más pequeños siendo el lado de uno de ellos 1/2 1/4 del lado del otro. ¿Cuáles son los lados de ambos cuadrados?

En la notación moderna es una ecuación con una incógnita fácil de plantear.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = \dfrac{3x}{4} \end{cases}$$

... donde las dos incógnitas, x e y, son las medidas de los lados de los dos cuadrados pequeños.

Veamos la solución propuesta en el **PB** a la vez que discutimos el procedimiento con una notación más moderna.

Asume que el lado del cuadrado mayor (x) toma el valor 1, por lo que el menor (y) es 3/4 (1/2 1/4), equivalente, si despreciamos la incógnita, a la segunda ecuación de nuestro sistema.

El siguiente paso es el cálculo de las áreas de los dos cuadrados problema teniendo en consideración los valores asignados. Asumiendo que el área del cuadrado es el cuadrado del lado. El cuadrado grande tiene de área 1 y el cuadrado pequeño 1/2 1/16 como se muestra en la siguiente multiplicación. Suma los valores obtenidos en las dos áreas como si se tratara de la primera ecuación de nuestro sistema ($x^2 + y^2$), resultando 1 1/2 1/16.

1	**1/2 1/4**
1/2	1/4 1/8
1/4	1/8 1/16
1/2 1/4	**1/2 1/16**

Para nosotros el lado del mayor es x^2 y el del menor (1/2 1/16) x^2, cuya suma según el problema es 100.

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\right) x^2 = 100$$

El siguiente paso es calcular la raíz cuadrada en los dos miembros de la ecuación.

$$\sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\right)} x = 10$$

El matemático lo calcula con suma facilidad en el segundo miembro. La raíz de 100 es 10 (10 x 10 = 100). Pero la raíz del primer miembro es complicada. Veamos el método utilizado por el egipcio.

Considera como número base m = 16, el "denominador" mayor del paréntesis.

1 **16**

1/2	8
1/16	1
1 1/2 1/16	**25**

... cuya raíz cuadrada es sencilla, 5 (5 x 5 = 25), al igual que la del número base 16, que será 4 (4 x 4 = 16). Expresando el valor como una serie de fracciones de numerador unitario se obtiene sin dificultad 1 1/4.

$$\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

Ahora aplica el método de la **falsa posición** y divide 10 entre 1 1/4.

$$\frac{valor\ buscado}{valor\ asignado} = \frac{resultado\ real}{resultado\ ficticio}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{10}{1 + \frac{1}{4}}$$

1	**1 1/4**
2	2 1/2
4	5
4	5
8	**10**

El lado del cuadrado mayor es 8 codos ($x = 8$). Hallar el valor del lado del cuadrado pequeño es una simple multiplicación.

$$y = \frac{3x}{4}$$

1	**8**
1/2	4
1/4	2
1/2 1/4	**6**

El lado del cuadrado pequeño es 6 codos.

Comprobemos los resultados obtenidos. El área del cuadrado grande es 64 codos cuadrados (8 por 8) y la del cuadrado pequeño 36 codos cuadrados (6 por 6), cuya suma es 100 codos cuadrados.

Problema 2 del PB

A partir de los datos que se han conservado se puede especular sobre el enunciado del problema.

¿Cómo dividir una superficie de 400 codos cuadrados (4 aruras) en dos áreas cuadradas cuyos lados se relacionan 2 es a 1 1/2?

En la notación moderna es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 400 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{1+\frac{1}{2}}{2} \end{cases}$$

De donde

$$x = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} y$$

$$x = \frac{3y}{4}$$

Sustituyendo en la primera ecuación

$$\left(\frac{3y}{4}\right)^2 + y^2 = 400$$

$$25y^2 = 6400$$

$$y = 16\ codos$$

Si uno de los lados es 16, el otro

$$\frac{x}{16} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2}$$

$$x = 12\ codos$$

Veamos el método seguido por el egipcio. El escriba conoce que n^2 veces $a^2 + b^2$ es igual a 400 considerando como lados básicos 2 y 1 1/2.

$$(an)^2 + (bn)^2 = 400$$

$$n^2(a^2 + b^2) = 400$$

$$n^2\left[2^2 + \left(1+\frac{1}{2}\right)^2\right] = 400$$

Calcula el valor del corchete obteniendo 6 1/4 que sería el mí-

nimo área global.

Ahora realiza la raíz cuadrada en ambos miembros.

Haces la raíz cuadrada de 6 1/4 [...]

$$\sqrt{n^2\left[2^2+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\right]}=\sqrt{400}$$

$$\sqrt{n^2\left(6+\frac{1}{4}\right)}=\sqrt{400}$$

$$n\left(2+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{400}$$

¿Cómo calcula la raíz cuadrada de 6 1/4? En principio puede parecer complicado, pero es bastante sencillo.

$$6+\frac{1}{4}=\frac{25}{4}$$

... por lo que su raíz es 5/2 0 2 1/2.

El manuscrito continúa

[...] 2 1/2. Se hace el resto [...]

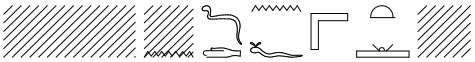
[...] haces [...] veces [...]

En esta fase del ejercicio suponemos que se realiza la raíz cuadrada de 400 obteniéndose 20, valor que divide entre 2 1/2 (la raíz de 6 1/4) para obtener el número de veces.

$$n\left(2+\frac{1}{2}\right)=20$$

$$n=\frac{20}{\left(2+\frac{1}{2}\right)}=8$$

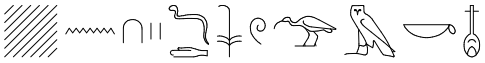
El texto mutilado sigue



[...] se le dice la raíz cuadrada [...]

[...] de acuerdo a la realización [...]

En este paso se multiplicaría el factor hallado, n = 8, por 2, valor asumido para el lado del cuadrado mayor, obteniéndose 16 codos, medida del lado del cuadrado grande.



[...] dando 12. Es lo que se pregunta. Lo encuentras correcto.

Multiplicando el mismo factor n = 8 por el valor asumido para el cuadrado pequeño, 1 1/2, se obtiene 12 codos, medida del lado de dicho cuadrado.

La prueba resultaría muy sencilla.

12 por 12	144
16 por 16	256
	400

Una variante del deteriorado problema 5 del PK incluye la resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, una de ellas también de segundo grado. Lo veremos con detalle al estudiar el volumen de un ortoedro en el capítulo dedicado al cálculo de volúmenes.

Problema 7 del Papiro matemático demótico

Partimos de la traducción de Couchoud (2004, págs. 139-140). La misma autora nos previene diciendo que este ejercicio es igual que el problema 15 y semejante a los 16 y 18 con cambios en los datos.

El problema se puede enunciar como '**Se te dice que tienes que fabricar telas para las velas de un barco como se te dice. Se necesitan 1.000 codos cuadrados de tela para fabricar una vela teniendo en cuenta que su altura es 1 1/2 su base. ¿Cuáles serán sus medidas?**

La resolución del ejercicio lleva implícito el conocimiento del cálculo del área del rectángulo, base por altura.

Con la nomenclatura actual escribiríamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de tal modo

$$\begin{cases} bh = 1000 \\ h = 1\frac{1}{2}b \end{cases}$$

Sustituyendo b en la primera ecuación nos queda

$$1\frac{1}{2}b^2 = 1000$$

$$b^2 = \frac{2000}{3}$$

$$b = \sqrt{\frac{2000}{3}} = 25 + \frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{90} codos$$

Como veremos el escriba calcula primero el valor de la altura. En vez de sustituir h en la primera ecuación, despejamos b y la sustituimos arriba.

$$b = \frac{2}{3}h$$

$$\frac{2}{3}h^2 = 1000$$

$$h^2 = \frac{3000}{2} = 1500$$

$$h = \sqrt{1500} = 38 + \frac{2}{3} + \frac{1}{20} codos$$

Es el mismo procedimiento seguido por el egipcio. Primero calcula los 3/2 de 1.000 resultando 1.500. Valor del que extrae la raíz cuadrada, 38 2/3 1/20 codos, sin que sepamos muy bien el procedimiento utilizado. Para hallar el valor de la base le basta con multiplicar el valor obtenido por 2/3, el inverso de 1 1/2, obteniendo 25 2/3 1/10 1/90.

Los problemas *b3kw* 'tasas'

En este epígrafe incluimos una serie de ejercicios retóricos en los que se calibra el posible trabajo realizado por un artesano o un vaquero o las tasas que deben ser pagadas por el mismo. Existen en la literatura tres claros ejemplos, el problema 67 del PMR y los ejercicios 11 y 23 del PMM. Además podríamos añadir problema 6 del PK, aunque su comienzo está muy alterado.

El desarrollo matemático de los mismos es diferente agrupándose en este apartado solamente por su enunciado.

Problema 67 del PMR

Un vaquero viene para abonar la tasa de ganado que le corresponde trayendo 70 bueyes. El recaudador de bueyes le dice al vaquero "es poco el ganado que me traes. ¿Dónde está lo que falta? Y el vaquero le contesta "te he traído 1/3 de los 2/3 de los bueyes que inspeccionaste. Haz el recuento y verás.

En la notación algebraica moderna la ecuación planteada es

$$\left(\frac{2}{3}.\frac{1}{3}\right)x = 70$$

$$\frac{2}{9}x = 70$$

$$x = \frac{630}{2} = 315$$

El egipcio seguirá un proceso algo distinto. Conocemos por la tabla del PMR que 2/9 es equivalente a 1/6 1/18.

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right)x = 70$$

$$x = 70\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right)}\right)$$

Calcula los 2/3 de 1/3 obteniendo los 2/9 que transforma, como hemos comentado, por la tabla 2/n del PMR en 1/6 1/18. Luego calcula el inverso del paréntesis efectuando la división correspondiente.

1	**1/6 1/18**
2	1/3 1/9
4	2/3 1/6 1/8 [2/9]
1/2	1/9
4 1/2	**1**

Basta con multiplicar el resultado obtenido por 70 para llegar a la respuesta.

1	**70**
2	140
4	280
1/2	35
4 1/2	**335**

Ahora se realiza la prueba.

1	**315**
2/3	210
1/3	105
2/3 de 1/3	**70**

Problema 11 del PMM

Un leñador debe traer 100 leños de 5 palmos de anchura, pero los ha traído de 4 palmos. ¿Cuántos debería haber traido de 5 palmos?

En un problema de proporcionalidad 'inversa', a menor anchura de los leños más leños tiene que aportar, lo que vulgarmente conocemos como **regla de tres inversa**.

Siguiendo nuestro procedimiento moderno.

$$\frac{superficie\ grande\ (5^2)}{superficie\ pequeña\ (4^2)} = \frac{x}{100}$$

$$x = \frac{2500}{16} = 156 + \frac{1}{4} leños$$

El matemático del papiro moscovita eleva 5 al cuadrado, obteniendo 25, y 4 al cuadrado, 16. Ahora divide 25 entre 16 resultando 1 1/2 1/16.

1	**16**
1/2	8
1/16	1
1 1/2 1/16	**25**

Simplemente multiplica el valor obtenido por 100 para calcular los leños.

1	**1 1/2 1/16**
10	15 1/2 1/8
100	**156 1/4**

Problema 23 del PMM

La primera traducción propuesta por Struve (1930, pág. 10) decía "Ejemplo del cálculo de un zapatero como se te dice (a propósito) del trabajo de encordado: si corta durante 10 días es recompensado por 5 días. ¿(Cuánto) va a cortar y ser recompensado por un díaintenso?", considerando que hay dos tipos de días de trabajo los normales, con un salario habitual, y otros, de trabajo intenso, con un salario doble.

Siguiendo las traducciones más modernas proponemos el enunciado que inferior.

Un zapatero cuando corta el cuero hace 10 sandalias por día, pero cuando las adorna hace 5 ¿Cuántas sandalias completas puede fabricar por día?

Aplicamos el sistema de **reducción a la unidad**. El zapatero tarda para hacer una sandalia 1/10 de día y para adornarla 1/5 de día. Para hacer las dos tareas 1/10 + 1/5 = 3/10 de día. En un día fabricará el inverso 10/3 = 3 1/2 sandalias por día.

El egipcio sigue el siguiente método. Piensa que el zapatero tarda 1 día en cortar 10 sandalias y 2 días en adornarlas, por lo que para confeccionar 10 sandalias tarda 3 días (1 + 2 = 3). Ahora aplica la proporcionalidad directa.

$$\frac{10\ sandalias}{x\ sandalias} = \frac{3\ días}{1\ días}$$

$$x\ sandalias = \frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$$

Es el procedimiento del escriba.

Problema 6 del PK

En el fragmento LV.4 del PK parece que se hace referencia al cálculo de una tasa de patos que deben pagarse a la vez que se añaden comparaciones con los valores de otras especies.

El ejercicio podría ser enunciado.

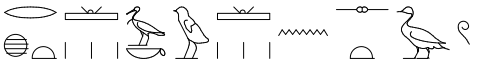
Un granjero debe aportar las tasas correspondientes a 100 patos "set" sabiendo que el valor de un pato "re" es de 8, el de un pato "tjerep" es de 4, el de un pato "djedjen" es de 2 y el de un pato "set" es

de 1. ¿Cuántos debe aportar para completar la deuda teniendo en cuanta que debe llevar el mismo número en las especies que aporte?

(43)

ḥsb bꜣkw n st

Recuento de la tasa de patos.

(44) 

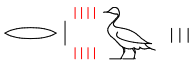
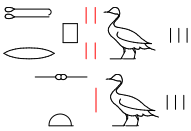
rḫt bꜣw n st 100

Lista de la tasa de para 100 patos.

(45)

kmwt n.f ḫnt rḫt pn st

Recuento final para él de lo que está en esta lista: patos "set".

(46)  (47)  (48) (49)

r 7 ṯrp 4 ḏnḏn 2 st 1

(El valor de un pato) "re" es 8 (3 patos), el de un pato "tjerep" es 4 (3 patos), el de un pato "djendjen" es 2 (3 patos), el de un pato "set" es 1 (3 patos).

(50)

ḫb.t(w) wʿ jꜣt

Se sustrae uno del total

(51)

ḏꜣt 11 jr.ḫr.k ʿꜣyw 100

... y el remanente es 11. Haces el exceso de 100

(52)

r 45 ḫprt jm pw 55 jr.ḫr.k

... sobre 45. Es lo que se convierte en 55. Haces

(53)

w3ḥ-tp m p3 11 r gmt 55

... la división entre 11 de 55.

(54)

ḥprt jm pw sp 5

Es lo que se convierte en 5 veces.

Intentaremos dar una explicación al ejercicio. El granjero tiene que pagar una tasa equivalente a 100 patos *set* y lleva aves por valor de 45 patos "set" al recaudador, 3 de cada una de las especies enumeradas (12 aves). El matemático resta 100 menos 45, obteniendo el valor de 55, la deuda del granjero en patos "set".

Veamos la equivalencia de aves aportada por el granjero.

Especie de pato	Valor de la especie	Número	Total
re	8	3	24
tjerep	4	3	12
djendjen	2	3	6
set	1	3	3
		12	45

Como tiene que aportar un número entero de patos es necesario trabajar con uno de los divisores de 55, y escoge el 11, que calcula como la resta de 12 (quizá el número total de patos) menos 1.

Ahora halla la razón de un reparto proporcional directo. Reparte los 55 patos que le faltan entre 11, obteniendo el valor 5, número de patos de cada especie que tendrá que aportar.

Como el divisor utilizado es 11 va a la columna de valor de la especie y suma los dígitos hasta obtener 11, eliminando la especie "tjerep". El resultado del reparto es

Especie de pato	Valor de la especie	Número	Total
re	8	5	40
tjerep	4	0	12
djendjen	2	5	10
set	1	5	5
		15	**55**

Por lo que el granjero tiene que llevar 15 patos, 5 de la especie "re", 5 de la especie "djendjen" y 5 de la especie "set" para completar los 55 set que debe.

Para la explicación de este problema se han vertido otras hipótesis. Maspero (1897, págs. 219-221)aventura otro enunciado "**Un cazador tiene que pagar una tasa anual de 100 patos 'set' o su equivalente en otras especies: un pato "re" es de 8, el de un pato "tjerep" es de 4, el de un pato "djedjen" es de 2 y el de un pato "set" es de 1. Y le quedan 11 meses para que se cumpla el plazo. ¿Cuántas aves tiene que presentar para cubrir la demanda?".**

El cazador tiene en su poder 3 aves de cada especie, por lo que calculando las equivalencias, llega a 45 (8x3+4x3+2x3+1x3 = 45). Si restamos 100 – 45 = 55 (línea 52), las aves que le quedan por aportar. Como tiene once meses para hacerlo, divide 55 entre 11 para obtener el promedio que le corresponde (líneas 53 y 54).

A partir de aquí el texto es poco comprensible, pero debe seguir de la siguiente forma. El escriba sumaría las equivalencias de las cuatro especies de aves (8+4+2+1 = 15) y dividiría las aves que faltan, 55, entre 15, obteniendo un valor de 3 2/3. Así que necesita 3 aves de cada especie, pero hay un remanente de 2/3 que el sabio egipcio calcularía.

2/3 de 8	5 1/3
2/3 de 4	2 2/3
2/3 de 2	1 1/3
2/3 de 1	2/3
	10

Tendría que haber llevado 6 aves de cada especie (3 que llevaba y 3 nuevas) además de 10 patos "set". Se realiza la prueba.

8 x 6	**48**
4 x 6	24
2 x 6	12
1 x 6	6
+ 10	10
	100

Esta versión elimina el 5 presente en el manuscrito de Kahun.

A partir de aquí el manuscrito del PK está muy dañado y no es posible

aventurar ningún ejercicio más.

(55)

rd.ḫr.k […] *m p3* […]

Colocas […] en el […]

(56)

ʿḥʿw […] *st 6* […]

Cantidad […] 6 patos "set" […]

(57)

jr.ḫr.k […] *8* […]

Haces […] 8 […]

(58) (59) (vacía)

ḫprt […]

Lo que se convierte […]

(60)

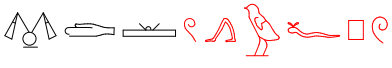
[…] *p3 5* […]

[…] los 5 […]

(61)

ḫprt jm pw 10 wʿ […] *tp*

Es lo que se convierte 10; un […]

(62) 

dmḏ 100 jw.f pw

En total 100. Resulta que se acabó.

[1] El copista comete un error. Ha escrito 9 + 6+ 1/18.
[2] El escriba ha copiado 6 en vez de 1/6.
[3] El papiro marca 99, un error de copia.

[4] El matemático obtiene el valor del número base multiplicando 12 por 12 sin que sepamos el motivo.
[5] El manuscrito marca 12, un error del copista.
[6] Copiado en el reinado de los Ptolomeos.