Aprender las matemáticas egipcias

Ángel Sánchez Rodríguez

2014

Índice

Índice I
Las fuentes matemáticas 1
La enseñanza de las Matemáticas en Egipto 3
Principales fuentes documentales 4
Contenido de los manuscritos 14
Problema 1 del PMM 18
Problema 2 del PMM 18
División y estructura de los textos matemáticos 22
El lenguaje y la gramática de los manuscritos 24
El sistema numeral egipcio 25
La numeración egipcia 28
La construcción de los cardinales y los ordinales 32
El año egipcio 33
Las dataciones reales 36
Los números racionales positivos 39
Grafía de los números fraccionarios 40
Lista numérica del fragmento XLV.1 del PK 43
Las fracciones enmascaradas en el ojo sagrado 44
Los auxiliares rojos 46
Un cuaderno de deberes. Los ejercicios del RMCL 47
¿Cómo realizaría el estudiante egipcio las sumas de fracciones? 50
Las tablas 2/n 51
Reglas para la elección de las series de fracciones por los egipcios 54
Propuesta de Robins para el cálculo de las series 57
La tabla 2/n del papiro de Kahun (PK) 59
Las tablas de productos de 2/3 63

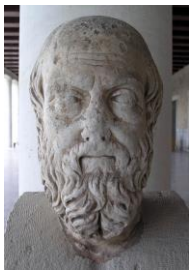
Problema 61B del PMM 63
Las tablas de divisiones entre 10 64
Hipótesis para el cálculo de fracciones de "numerador" superior a 2 64

Amigos de la Egiptología

www.egiptologia.com

Las fuentes matemáticas

Para comprender el desarrollo que sufrieron las Matemáticas durante el Egipto dinástico se hacen imprescindibles unos breves conocimientos históricos y socioeconómicos, asomarse a la construcción, hace cinco milenios, de una de las dos grandes civilizaciones de la edad Antigua, a saber, el país de las Dos Tierras, *Ꜣwy*. Como su propio nombre indica su territorio se compone de dos zonas claramente diferenciables: el Bajo Egipto, limitado al delta del Nilo, región con forma triangular con el vértice inferior cercano a la capital del Reino Antiguo, Menfis, distante 160 Km. del mar Mediterráneo, y el Alto Egipto, casi restringido, a causa de los desiertos, a pocos kilómetros a derecha e izquierda del cauce fluvial, llegando hasta la puerta de los territorios cusitas y nubios.



Heródoto de Halicarnaso

Ἡρόδοτος Ἁλικαρνᾶσσεύς

Historiador y geógrafo griego que vivió durante el siglo V a. C. Autor de nueve libros de historia dedicados a las nueve musas griegas.

Los libros II y III hacen referencia a Egipto.

A finales del neolítico africano las llanuras desérticas se expanden y muchos de los asentamientos tribales se ven obligados a desplazarse buscando ubicaciones que les permitieran una supervivencia más asequible. En el ángulo nororiental las poblaciones se trasladan hacia el valle del Nilo, Hapy (*Ḥꜥpy*) para los nativos, una arteria fluvial originada por la confluencia de dos brazos principales, el Nilo blanco, procedente de los grandes lagos del oriente de África, y el Nilo azul, que recopila las lluvias y el deshielo generados en las

cumbres de las montañas etiópicas, que recorre el país de sur a norte como un cuchillo desde la frontera meridional de Egipto en la llamada primera catarata, englobada por la actual presa de Assuan, hasta las cercanías de la actual capital egipcia, El Cairo, donde sufre una bifurcación en varios ramales, siete para los autores clásicos (HERÓDOTO, 1992)…

El Nilo, a partir de las cataratas, corre hacia el mar dividiendo a Egipto por la mitad. Hasta la ciudad de Cercasoro, pues, el Nilo corre por un solo cauce, pero a partir de esa ciudad se divide en tres brazos. Uno, que se denomina (boca) **Pelusia**, se dirige al este; otro brazo va hacia el oeste y recibe el nombre de **Canóbico**. Finalmente, el brazo del Nilo que va en línea recta es como sigue: en su curso desde el alto Egipto llega hasta el vértice del delta, divide, a partir de ese lugar, el delta por la mitad y desemboca en el mar; este brazo se denomina boca **Sebenítica**, no es el que aporta el menor caudal de agua ni el menos famoso. Y todavía hay otras dos bocas que, escindidas de la **Sebenítica**, se dirigen al mar; tienen los siguientes nombres: una **Saítica** y la otra **Mendesia**. La boca **Bolbitina** y la **Bucólica**, por otra parte, no son bocas naturales, sino excavadas (HERÓDOTO, 1992, págs. 17, 3-6).

… que dibujan el delta nilótico, un verdadero vergel, que recibe este nombre por su semejanza con la letra griega mayúscula de su mismo apelativo (Δ).

Esta configuración geográfica permitió a los habitantes de Kemet, la tierra negra, en contraposición con el desierto (*dšrt*) disponer de algo que será crucial para el desarrollo científico de la Humanidad, **tiempo**.

No sin razón el primero que inventó un arte cualquiera, por encima de las nociones vulgares de los sentidos, fue admirado por los hombres, no sólo a causa de la utilidad de sus descubrimientos, sino a causa de su ciencia, y porque era superior a los demás… Las artes se multiplicaron, aplicándose las unas a las necesidades, las otras a los placeres de la vida; pero siempre los inventores de que se trata fueron mirados como superiores a los de todas las demás, porque su ciencia no tenía la utilidad por fin. Todas las artes de que hablamos estaban inventadas… Nacieron primero en aquellos puntos donde los hombres gozaban de reposo (de AZCÁRATE, Obras completas de Aristóteles. Tomo X, 1875, pág. 54).

Las inundaciones periódicas provocadas por la fusión de las nieves en las lejanas montañas etiópicas facilitaron las cosechas y una rápida jerarquización de su sociedad distribuida en clases bien definidas: el rey en el vértice de la pirámide, como garante de la cultura y propietario del conjunto del territorio, el clero y la nobleza, incluyendo los altos cargos del ejército, en un segundo escalón, y el pueblo llano, artesanos y campesinos en la base social[1]. Esta distribución tuvo una importancia fundamental en el desarrollo de las ciencias en época tan temprana. Un estado desarrollado facilitó el acceso a la investigación y al conocimiento, así como la creación de centros educacionales para la transmisión de los mismos. Los avances en Matemáticas, Astronomía y Medicina fueron muy notables para la época, 3000 años a.C.

La hipótesis que los grandes ríos facilitan el desarrollo de las civilizaciones y el avance sociocultural se ve confirmada por el hecho de que la otra civilización contemporánea que alcanzó un notable progreso científico y social fue la mesopotámica (Μεσοποταμία – del griego 'entre ríos'), ubicada entre dos grandes cauces fluviales, el Tigris y el Éufrates.

La enseñanza de las Matemáticas en Egipto

A pesar de que para la sociedad moderna las bases de las Matemáticas fueron asentadas por los griegos, estos últimos indican en sus escritos que su origen estuvo en la civilización egipcia. Así comenta Aristóteles en su obra Metafísica.

Las matemáticas fueron inventadas en Egipto, porque en ese país se dejaba una gran solaz a la casta de trabajadores (de AZCÁRATE, Obras completas de Aristóteles. Tomo X, 1875, pág. 54).

Desde un primer momento debemos tener en mente que el pueblo egipcio en su mayoría no tenía acceso a los conocimientos básicos. Solamente las clases privilegiadas: príncipes, altos dignatarios y sacerdotes podían llevar a sus hijos a las "casas de la vida" (*pr ꜥnḫ*), centros templarios o palaciegos donde se impartirían clases encaminadas a alcanzar una mejor posición social dentro de la compleja estructura civil egipcia.

La enseñanza no sería, en ningún caso, excesivamente dura como nos muestra un texto de Platón, en el discurso entre Clinias y un ateniense.

¿Qué debe aprenderse en este género, hasta qué punto, en qué tiempo, qué ciencias deben estudiarse con otras o aparte? ... ¿cómo es preciso combinar estos diversos estudios? ...

Obliguemos por ley a los ciudadanos a que aprendan de estas ciencias lo que los niños en Egipto aprenden todos sin distinción a la par de las primeras letras. Se comenzará por hacer que se ejerciten, jugando, en los pequeños cálculos inventados por los niños, y que consisten ya en repartir con igualdad, tan pronto entre muchos como entre pocos de sus camaradas, un cierto número de manzanas o de coronas; ya en distribuir sucesivamente y por medio de la suerte, en sus ejercicios de lucha y de pugilato, los papeles de luchador par o impar; ya en mezclar ampollitas de oro, de plata, de bronce y de otras materias semejantes, distribuyéndolas como dije antes; de suerte, que al mismo tiempo que se les divierte se les obligue a recurrir a la ciencia de los números. Estos pasatiempos los pondrán para lo sucesivo en estado de dividir un campo, conducir y poner un ejército en buen orden, y administrar bien sus negocios domésticos; y en general, producirán el efecto de que el hombre se hará completamente diferente de lo que era con relación á la sagacidad del espíritu y al provecho que puede sacar de sus talentos; además de librarse de esa ignorancia ridícula y vergonzosa, en que nacen los hombres en lo relativo a la medida de los cuerpos según su longitud, latitud y profundidad (de AZCÁRATE, 1872, pág. 60).

Principales fuentes documentales

Aunque en la actualidad desconocemos el origen de la ciencia Matemática en el Egipto Antiguo, no parece descabellado pensar que, tras alcanzar la estabilidad política en el periodo dinástico, los sabios desarrollarían un sistema numérico que desembocaría en toda una serie de conocimientos que hoy en día nos dejan perplejos.

Es lógico suponer que los números y la escritura jeroglífica, reflejo de la lengua hablada, fueran de la mano en sus inicios.

Si hacemos caso a la Mitología, la escritura fue creada por el dios Thot (Djehuty), uno de los semidioses (WADELL, 1964, pág. 17) gobernantes de Egipto antes del surgimiento de las dinastías, según reza el papiro médico Ebers, un conjunto de recetas farmacológicas para el tratamiento de males muchas veces poco definidos, en el que también se explican los conocimientos anatómicos y fisiológicos del pueblo egipcio.

Pertenezco a Ra quien ha dicho: 'Soy yo quien lo protegerá de sus enemigos, pues Thot (Djehuty) es su guía y hace que los escritos hablen' (Ebers 1, 7-8).

Alexander Henry Rhind

Abogado y anticuario escocés que adquirió el papiro matemático que lleva su nombre.

(es.wikipedia.org/wiki/Alexander_Henry_Rhind)

El escribiente del papiro Ebers pertenece a los "sacerdotes de Ra" y será conducido en el aprendizaje por Thot creador de la escritura y seguramente de los primeros conocimientos científicos.

Ilustración 1. Maza ceremonial del rey Narmer (Menes) donde se inscribió una lista con cantidades de las capturas realizadas.

La primera noticia que tenemos hasta la actualidad de un documento relacionado con las Matemáticas es la maza ritual del rey Narmer (Menes), fundador de la I dinastía, custodiada en el *Ahsmoleam museum* de Oxford, conteniendo el registro de las capturas realizas por el faraón en el IV milenio a.C., donde se ha grabado una lista de número escritos en caracteres jeroglíficos: 120.000 prisioneros, 400.000 toros y 1.422.000 cabras (QUIBELL, 1900, pág. 9).

Si exceptuamos pequeñas listas o inventarios escritos en los muros de los templos o tumbas nobiliarias, los documentos matemáticos, tablas y problemas aritméticos y geométricos, están escritos en hierático sobre papiro (del griego πάπυρος), un soporte de escritura fabricado con láminas de *Cyperus papyrus L.* Para su fabricación, una vez cortado el tallo de la planta en finas tiras, éstas se prensan, se dejan secar y se entrelazan por una cara de forma vertical y por la opuesta horizontalmente. Una vez terminado el proceso se somete al conjunto a un segundo prensado que facilita la acción adhesiva de la savia restante.

Los pliegos se elaboran abriendo la corteza de la planta con un punzón, extrayéndose el líber o película interna en hojas delgadísimas, de la mayor extensión posible. Estas bandas (entre 42-44 cm) se extendían sobre una tabla humedecida, disponiéndolas en capas con la fibra en dirección perpendicular, de manera que la hoja así obtenida ofreciese suficiente resistencia (se comprimían por presión y peso). Después se encolaba, se batía con un mazo y se dejaba secar. Las

inevitables desigualdades causadas por un procedimiento tan artesanal se suavizan frotando las hojas con una concha (o una piedra fina), con lo que la superficie quedaba uniforme y lustrosa. Uniendo varias hojas se obtenía una cinta de longitud variable que podía luego enrollarse (PLINIO, 2007).

El documento más importante que se ha conservado es, sin duda, el **Papiro matemático Rhind** (PMR), que debe su nombre al anticuario escocés *Alexander Henry Rhind* (1833-1863), un abogado nacido en Wick, quien marchó a Egipto por problemas de salud.

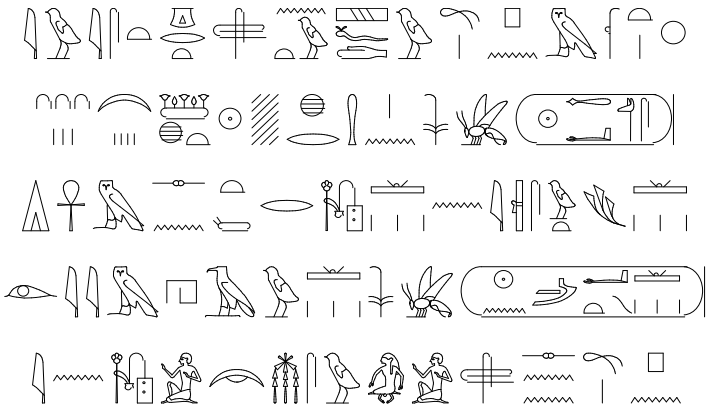
Este manuscrito también se conoce por el nombre del copista, el escriba *Ahmosu (Ahmés)*. Fue adquirido, junto con el **Rollo matemático de cuero de Londres** (RMCL) del que hablaremos más adelante, en Luxor en 1858, procedente de unas excavaciones ilegales en la zona del Ramesseum, el templo funerario de Ramsés II, edificado en la orilla occidental tebana.

La primera noticia que se tuvo de este manuscrito y de su importante contenido de debe a un trabajo del numismático y arqueólogo parisino François Lenormant (1837-1883) (LENORMANT, 1867), al que siguieron las publicaciones del inglés Samuel Birch (1813-1885) (BIRCH, 1868) y del egiptólogo alemán H. K. Brugsch (1827-1894) (BRUGSCH, 1874).

Consta de 14 láminas, que en su conjunto conforman un papiro de algo más de 5 m. de longitud por 0,32 m. de anchura, recopiladas en dos grandes fragmentos custodiados en el museo Británico de Londres, los papiros BM 10057 y BM 10058 (2,955 m. pertenecen al BM 10057 y 1,995 m. al BM 10058), que fueron adquiridos de manos del abogado del aventurero, David Bremner en 1865. A éstos hay que asociar 25 pequeños trozos correspondientes a una zona rota de unos 18 cm. (PEET, 1923) entre los dos manuscritos londinenses, provenientes de la colección de la Sociedad Histórica de Nueva York (ROBINS, 1987), identificados por Newberry en 1922, y que se guardan en el museo de Brooklyn (37.1784E), conocidos como **fragmentos Smith**, en honor de su comprador, el americano Edwin Smith, cuyo nombre se asocia también a un excelente papiro quirúrgico.

El PMR se ha fechado en el siglo XIX a.C. bajo el reinado del rey del alto y bajo Egipto Nymaatra (Amenemhat III), gobernador del país del Nilo en la XII dinastía, aunque el manuscrito que nos ha llegado es de época hicsa, una copia con ejercicios recopilados de algún trabajo anterior de mayor envergadura que ordenó transcribir el mo-

narca Apofis I en el siglo XVI a.C., quien reinó en la XV dinastía perteneciente al II Periodo Intermedio.



Es ahora cuando se ha registrado este rollo de papiro en el año 33 de reinado, en el cuarto mes de la estación de akhet [..] bajo la majestad del rey del alto y bajo Egipto Aauserra (Apofis I),¡que se le dé vida!, en concordancia con los escritos de los antiguos que fueron realizados en época del rey del alto y bajo Egipto Nymaatra (Amenemhat III) por el escriba Ahmosu, quien registró este papiro (BM 10058).

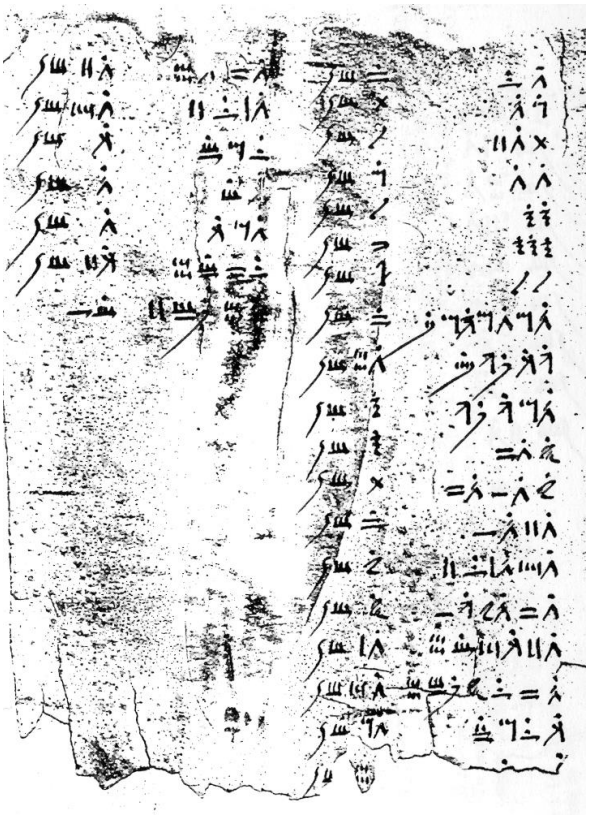


Ilustración 2. Primeras columnas del Rollo matemático de cuero de Londres (RMCL). Tomado de (GLANDVILLE, 1927).

Como la mayoría de los papiros, y en especial aquellos que contienen desarrollos matemáticos, está escrito en hierático, una variante cursiva de la escritura jeroglífica debida a un incremento en la velocidad de manipulación de los diferentes signos que se produce al escribir sobre un material no pétreo utilizando tinta y pincel.

La numeración que se utiliza en la actualidad fue sugerida por el profesor alemán Eisenlohr (1832-1902) (EISENLOHR, 1877), quien realizó una traducción y comentario

del texto, mejorada más tarde por el profesor de la universidad de Liverpool Thomas Eric Peet (1882-1934) (PEET, 1923).

Junto con el PMR se encontró, posiblemente en el mismo yacimiento de la orilla occidental tebana el RMCL, una lámina de 25 x 43 cm. A pesar de adquirirse en 1864 formando parte la colección de manuscritos de Alexander Henry Rhind, no fue hasta 1927 cuando pudo desenrollarse por parte del profesor Alexander Scott (SCOTT, 1927). Se ha fechado en el siglo XVII a.C.

El siguiente documento en importancia, de más de 5 m. de longitud (5,44 m) x 8 cm. de anchura (GILLINGS, 1972), con 45 agrupaciones en columnas de escritura hierática dificultosa (paleográficamente se le compara con los papiros de Illahun (TURAIEV, 1917)), es el **Papiro matemático de Moscú** (PMM), también llamado papiro matemático **Golenischeff**, nombre del propietario del mismo. Se ha fechado a finales del Reino Medio (XII-XIII dinastías) y fue adquirido por el egiptólogo ruso a uno de los hermanos que localizaron las momias reales de Deir el-Bahari, Abd el-Rasoul (GILLINGS, 1972), quien afirmó que procedía de la necrópolis de Dra Abou'l Negga (CLAGETT, 1999). En 1916 pasó a engrosar las arcas del museo de Bellas Artes de Moscú (Museo Pushkin) donde se custodia (4676). A pesar de su tamaño no ha sobrevivido el nombre del autor ni del copista. En la actualidad consta de una pieza grande y 9 pequeños fragmentos (COUCHOUD, 2004).

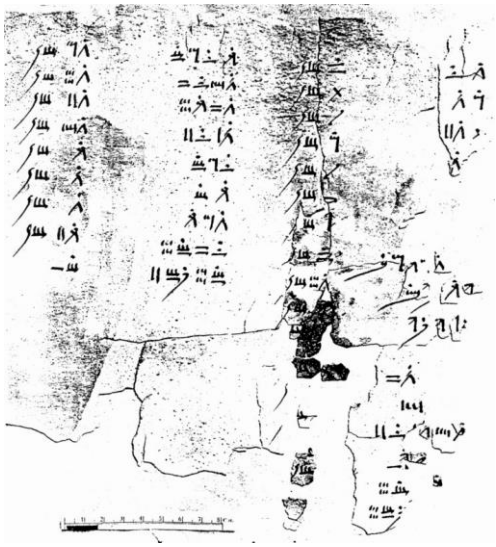


Ilustración 3. . Ultimas columnas del Rollo matemático de cuero de Londres (RMCL). Tomado de (GLANDVILLE, 1927).

La primera noticia que se tiene de este papiro es la mención que hace Cantor en 1880 (CANTOR, 1880) y la numeración de sus ejercicios se debe a Struve (STRUVE, 1930), quien los separó en 25 ejercicios.

Aparte de estas dos magníficas obras, el PMR y el PMM, se han encontrado toda una serie de documentos menores que realizan pequeñas aportaciones a nuestro estudio. Entre ellos los cuatro frag-

mentos muy deteriorados del **Papiro matemático de Berlín** (PMB), Berlín 6619, publicado por Schack-Schackenburg en dos trabajos: Der Berliner Papyrus 6619 (SCHACK-SCHACKENBURG H. 1., 1900) y Das kleinere Fragment des Berliner Papyrus 6619 (SCHACK-SCHACKENBURG H. , 1902) . Se ha fechado, como la mayoría de los papiros matemáticos, en el Reino Medio, a finales de la XII dinastía o comienzos de la XII (CLAGETT, 1999).

El **Papiro Reisner I** (PRI) consta de nueve láminas que totalizan alrededor de 3,5 m. de longitud y 31,6 cm. de altura, fue encontrado en 1904 por George Reisner durante las excavaciones llevadas a cabo en Naga ed-Deir por la universidad de California (CLAGETT, 1999) y el museo de Bellas Artes de Boston (38.2062) y publicado por Simpson (SIMPSON, 1963) quien lo fecha entre los siglos XVIII y XIX a.C., durante la XII dinastía, en los reinados de Amenemhat I o Senuseret I (Sesostris I)[2] con preferencia para este último.

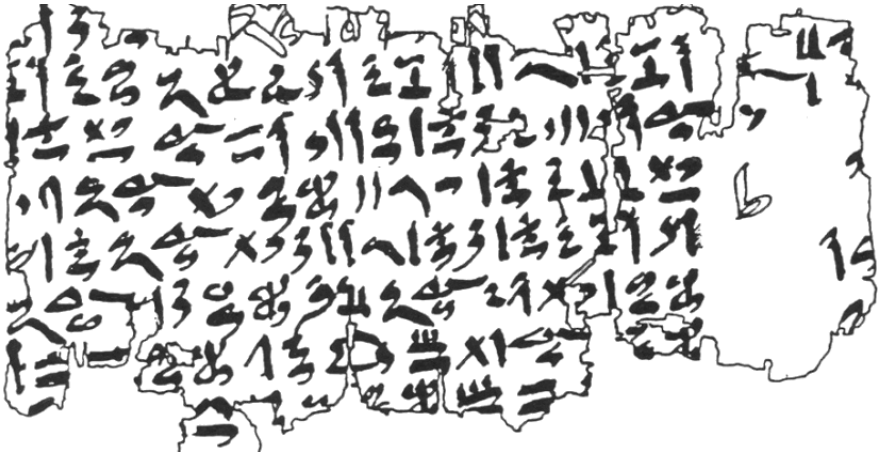


Ilustración 4. Primer fragmento del PMB (SCHACK-SCHACKENBURG H. 1., 1900).

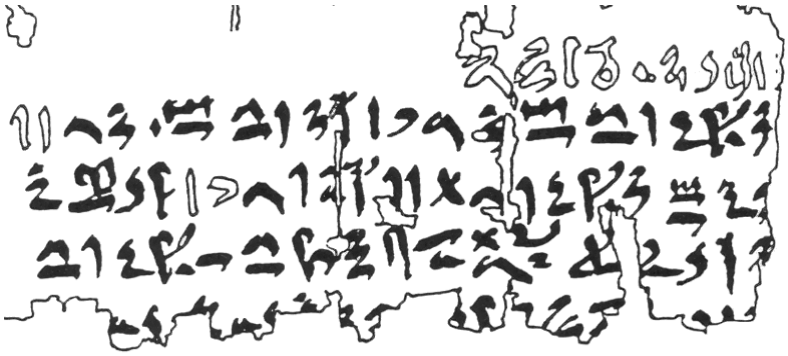


Ilustración 5. Segundo fragmento del PMB (SCHACK-SCHACKENBURG H. 1., 1900).

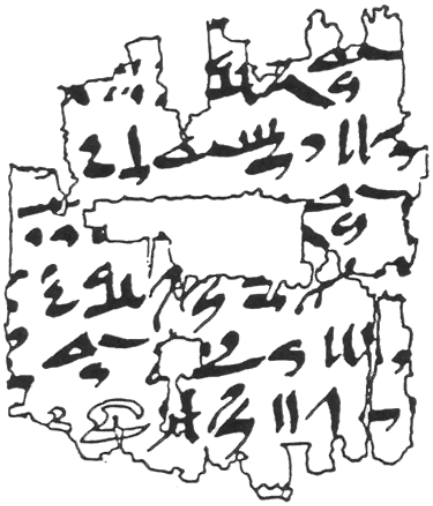


Ilustración 6. Tercer fragmento del PMB (SCHACK-SCHACKENBURG H. 1., 1900).

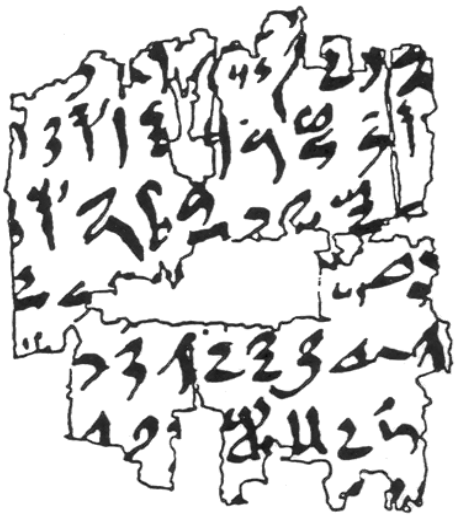


Ilustración 7. Cuarto fragmento del PMB (SCHACK-SCHACKENBURG H. 1., 1900).

En el conjunto de papiros conocidos como **Papiros de Kahun** (PK) descubiertos por Petrie en 1889 en unas excavaciones cercanas al emplazamiento de la pirámide de Senuseret III (Sesostris III) en Illahun (CLAGETT, 1999) y publicados por Griffith (GRIFFITH, 1897), se descubrieron además de un himno al rey Senuseret III (Sesostris III), un pequeño fragmento del cuento de la Disputa entre Horus y Seth, la narración muy deteriorada del cuento de Hay, prescripciones médicas y veterinarias, textos legales y administrativos y unos pequeños fragmentos, en número de siete, con problemas matemáticos que se conservan en el University College de Londres (UC 32.118, UC 32.134A y B, UC 32.159, UC 32.160, UC 32.161 y UC 32.162). Se ha fechado en la segunda mitad de la XII dinastía, durante el reinado de Amenemhat III.

El pequeño trozo 32.118B, que no fue incluido por *Griffith* en su publicación de los papiros de Kahun, está muy deteriorado en su parte inferior y solamente se conservan de él cuatro líneas:

(1)

njs.ḫr.k gm.k nfr…

Entonces operas y encuentras que está correcto…

Frase muy habitual en el PMM y en los fragmentos del PMB al final de los problemas.

(2)

jr ḏd n.k s nb…

Si se te dice que un hombre cualquiera…

(3)

m 2 wꜣḥ.ḫr.k 1/4 ḥr.f r nḥḥ jr…

… en 2. Luego depositas 1/4 sobre él continuamente y haces…

(4)

1/2 ḏꜣt m 1 jr…

1/2 y el remanente en 1. Luego haces…

Facsímile del inicio del papiro Rhind (tomado de Clagett, M.).

Del fragmento 32134B solamente podemos extraer

tq n sjty

Ejemplo de prueba.

En esta breve enumeración de las fuentes matemáticas egipcias no podemos dejar pasar las **Tablillas de madera de Akhmîm**,

procedentes de la Panópolis griega, antigua capital del IX nomo del alto Egipto, custodiadas en el museo Egipcio de El Cairo (25367 y 25368), adquiridas en el año 1885. Fueron estudiadas por Daressy y fechadas en el año 38 (?) del reinado de un monarca del que no nos ha llegado el nombre, para algunos estudiosos un rey de la XII dinastía (Senuseret I), mientras que otros la datan en la XV dinastía. Son unas piezas inscritas por las dos caras, relativamente pequeñas, de 46,5 x 26 cm., que no deben confundirse con el **papiro matemático de Akmîm**[3] (BAILLET, Le papyrus mathématique d'Akhmîm, 1892, págs. 1-89), de época bizantina, escrito en griego entre los siglos VI-IX d.C., donde se muestran resultados de divisiones n/p similares a los utilizados por los matemáticos egipcios, actualmente custodiado en el museo Egipcio de El Cairo (10758).

Para finalizar comentaremos la existencia de otros documentos escritos en griego. Entre ellos, el **Papiro de Michigan nº 621** (KARPINSKI L.-C. , 1923, págs. 20-25) y el **Papiro Ayer** (GOODSPEED, 1898, págs. 25-39).

El primero, el **Papiro de Michigan 621** (PM) fue sacado a la luz tras la retirada de las capas de limo que fueron utilizadas como fertilizantes durante la primera guerra (KARPINSKI L. C., 1922, pág. 20), en la región de el-Fayum. Mide 106,68 cm. de largo por 9,2 cm. de ancho y se ha fechado a finales del siglo IV d.C., aunque no hay fecha alguna que lo precise (KARPINSKI L. C., 1922, pág. 20) (ROBINS F. , 1923, pág. 328). Consta de 19 columnas estrechas en las que se han inscrito tablas de fracciones siguiendo el procedimiento egipcio de expresarlas como suma de fracciones de numerador unitario a excepción de la fracción 2/3. El principio del texto, donde se encuentra la tabla correspondiente a 1/7, ha desaparecido, y el documento finaliza tras el encabezamiento de la tabla que haría referencia a 1/19.

Ilustración 8. Fragmento del papiro matemático de Michigan nº 621 (KARPINSKI L. C., 1922, pág. placa).

El **Papiro Ayer**, un manuscrito de 40,5 cm. de longitud por 21,3 cm. de anchura con 35 líneas completas, fue adquirido en una tiendecilla de El Cairo, y llevado, en un primer momento, al museo de Giza, pero posteriormente trasladado al museo de Chicago, donde se custodia. Al parecer proviene de Hawara (el-Fayum), de algún próximo a la pirámide, y fechado alrededor del 150 d.C.

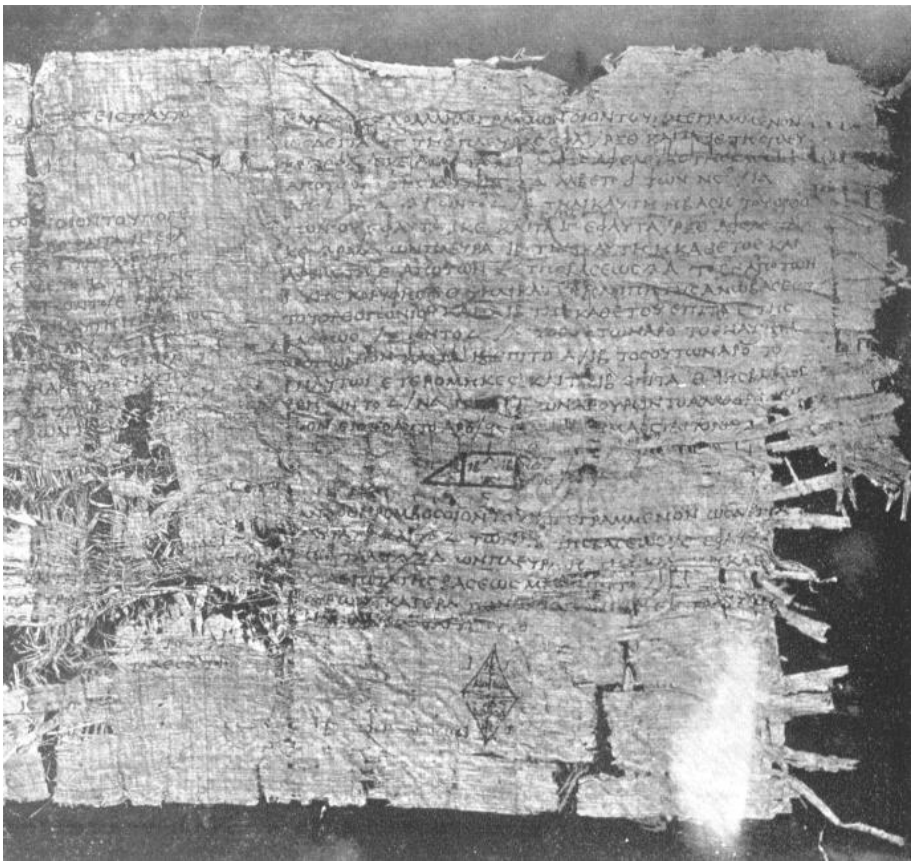


Ilustración 9. Recto del Papiro de Ayer (GOODSPEED, 1898).

Ilustración 10. Verso del Papiro de Ayer (GOODSPEED, 1898).

Además se conocen dos extensas cartas aritméticas de Nicolás Artavasde Rhabda de Esmirna con tablas (KARPINSKI L. C., 1922, pág. 23).

Contenido de los manuscritos

A diferencia de los autores griegos que desarrollaron las Matemáticas varias centurias más tarde, no podemos esperar de los egipcios, al menos en los documentos que nos han llegado hasta hoy, el desarrollo de una teoría aritmética y geométrica bien estructurada. Solamente encontraremos libretos con ejercicios, en algunas ocasiones muy dispersos, sin tendencia a la demostración de los mismos ni siguiendo un orden que nos indique que se pudieran tratar de manuales organizados temáticamente, aunque en el PMR encontremos algún tipo de sincronía en la distribución de los problemas.

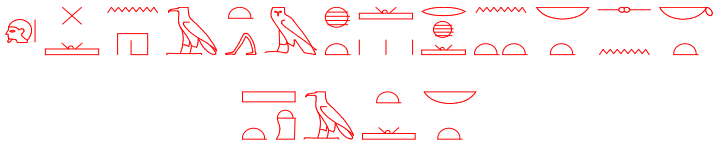
La variedad de tablas, ejercicios y problemas de los distintos papiros es muy grande, incluso su dificultad varía de unos documentos a otros, desde los más complejos, el PMR y el PMM, hasta aquellos que parecen los deberes de un estudiante, como RCML.

El PMR está escrito por los dos lados, el recto[4] y el verso. Muchos de los problemas se inician con un "enunciado" en tinta roja.

El recto del papiro BM 10057 se expone en la tercera habitación de antigüedades egipcias.

El título se localiza en el recto del papiro BM 10058 (ROBINS, 1987), seguido de una tabla para calcular el equivalente de fracciones **2/n** en sumas de series de numerador unitario, siendo *n* un número impar desde el 5 al 101 que se continúan con los fragmentos del museo Brooklyn (ROBINS, 1987) y con el comienzo del recto del papiro BM 10057, que continúa con los problemas hasta el 60. El siguiente, el 61, se localiza en el verso del papiro BM 10058 que finaliza con el 85. Los dos problemas que quedan, difíciles de comprender, se localizan en dos pequeñas porciones escritas en el verso del BM 10057.

El papiro se inicia



tp-ḥsb n ꜣt m ḫt rḫ ntt nbt snkt / štꜣt nbt

Método correcto de descender en las cosas conociendo todo lo que está oculto y todas las cosas misteriosas.

Los egipcios no tenían un vocablo específico para definir a los estudiosos de las Matemáticas, cosa que si existía para describir a los profesionales de la Astronomía (*wnwty*) o de la Medicina (*swnw*). El comienzo del PMR nos hace pensar en los maestros de los secretos (*ḥry sšt3*), aquellas personas conocedoras de la sabiduría oculta, los conocimientos que no podían llegar al pueblo llano. Quizá alguno de estos personajes fueran quienes estudiaron y desarrollaron las ciencias Matemáticas en los primeros periodos del Egipto dinástico.

Su contenido tras la parte dedicada a la tabla **2/n** se muestra en el cuadro siguiente donde se especifican los números de los problemas y el contenido esencial de los mismos.

Número	Contenido
1-6	Divisiones
7-20	Multiplicaciones
21-23	Sustracciones

24-27 **30-38**	Ecuaciones de primer grado (ꜥḥꜥw) y problemas *b3kw*
28-29	"Pensar" un número
39-40; 64	Progresiones aritméticas
41-46	Volúmenes
47	Fracciones de *heqat*
48-55	Áreas
56-60	Cálculos de pirámides
61	Cálculo de 2/3
62-63; 65-68	Proporciones
69-78	Problemas de *pesu* o *pefsu*
79	Progresión geométrica
80-81	Tablas del ojo sagrado
82-85	Problemas poco claros, posiblemente *b3kw*.
86-87	Incidentes poco claros

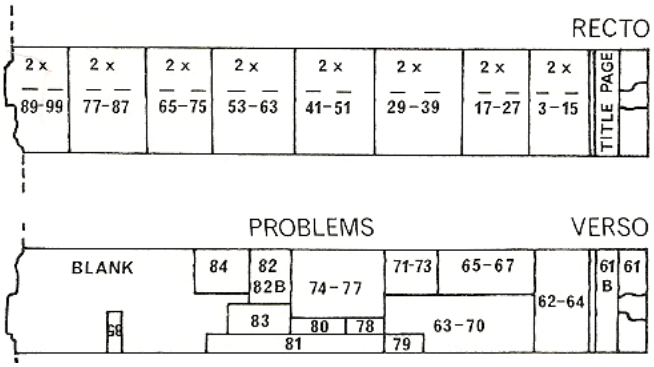


Ilustración 11. Disposición de los problemas en el papiro BM 10058 (CHACE, 1927).

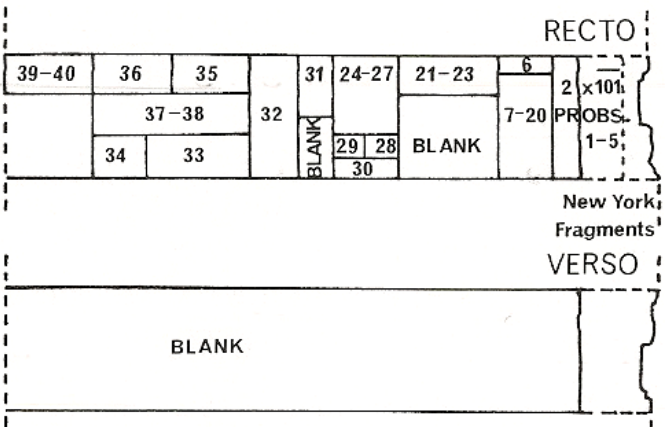


Ilustración 12. Disposición de los problemas en el papiro BM 10057, correspondiente a la parte central del manuscrito original (CHACE, 1927).

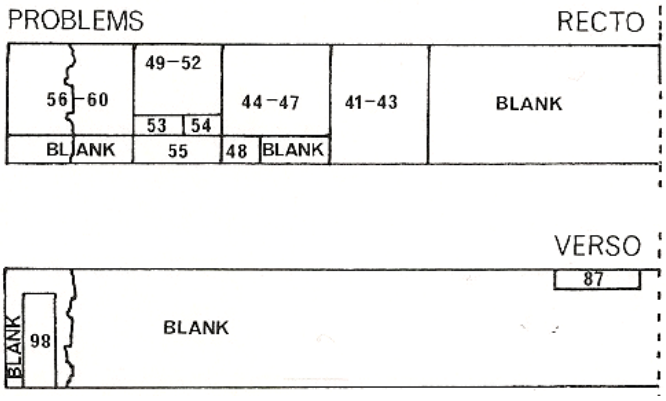


Ilustración 13. Disposición de los problemas en el papiro BM 10057, correspondiente a la parte izquierda del manuscrito original (CHACE, 1927).

Se ha sugerido que los números 86 y 87 fueron más tardíos que los anteriores, pero posiblemente escritos por la misma mano (MÖLLER, Hieratische Paläographie, 1909-1936, pág. 18).

Los problemas en el papiro siguen una distribución escogida. En primer lugar se inscribió la tabla 2/n que serviría para facilitar las operaciones de algunos ejercicios. Le siguen los problemas aritméticos, los geométricos y los referidos a progresiones y repartos proporcionales. Además dentro de un mismo grupo se han colocado en grado creciente de dificultad, los más sencillos primero (COUCHOUD, 2004).

El RMCL es un documento muy sencillo donde se inscribieron 26 líneas duplicadas en lo que parece un ejercicio de suma de fracciones de numerador unitario que tiene como resultado una fracción equivalente de numerador la unidad. Algunos autores sugieren que la segunda lista es copia de la primera porque mantiene los mismos errores matemáticos (GLANDVILLE, 1927).

El PMM parece contener el desarrollo matemático de 25 problemas aunque inicialmente se consideraron 19 (TURAIEV, 1917) al no tenerse en cuenta aquellos que se encontraban fragmentados. Son de índole diversa y de una mayor complicación que los escritos en el PMR, pero se encuentran distribuidos de una forma más anárquica, entremezclados, lo que ha sugerido a algunos autores que sería obra de un escolar, pero desde luego sus conocimientos matemáticos eran muy avanzados como podremos ver más adelante.

La mayoría de los ejercicios son de los mismos tipos que los referidos en el PMR, pero dos de ellos son especiales: el cálculo del área de una semiesfera y el del volumen de un tronco de pirámide.

Su contenido se muestra en la tabla siguiente.

Números	Contenido
1-19-25	(posibles problemas *ꜥḥꜥw*)
2-3	Cálculo de barcos
4-6/7-10-17/8	Áreas (incluye *semiesfera*), junto con sistemas de dos ecuaciones, una de ellas de segundo grado con dos incógnitas
5-8/9-12/13-15/6-20-22-24	Problemas *pesu*
11-23	Ecuaciones de primer grado y problemas *bꜣkw*
14	Volumen de un tronco de pirámide
21	Problema de ofrendas de pan. Regla de aligación

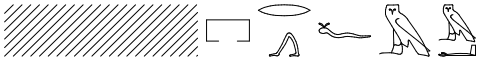
Los dos primeros ejercicios están muy deteriorados y pertenecen a la placa 11 del manuscrito.

Problema 1 del PMM

(1)

(*1*) [...] *pr.f m-mꜥ*

[...] ¿Qué sale de ello?

(2) 

(*2*) [...] *pr.f m-mꜥ*

[...] ¿Qué sale de ello?

(3)

(*3*) [...] *ḫpr.ḫr.(f m) 5*

[...] y se convierte en 5.

Problema 2 del PMM

(4)

(4) *tp n jrt ḥmw n* […]

Ejemplo de hacer un remo de [...]

(5)

(5) *mj ḏd n.k ḥmw n* […]

... como se te dice. Un remo de [...]

(6)

(6) *ḥ3 dj.k rḫ.j* […]

Desearía que dejaras que conociera [...]

El desarrollo de los problemas es mucho más escueto que en el PMR, tras el enunciado se expone el procedimiento utilizado y la respuesta final sin que aparezcan las operaciones como en la mayor parte de los problemas del PMR.

Del PMB se sacan a la luz dos problemas relacionados con la resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas siendo una de ellas de segundo grado. Uno de ellos bastante completo y el segundo muy alterado.

El PRI se ha dividido clásicamente en 17 secciones denominas con las letras de la A a la Q, de las que solamente las comprendidas entre la G y la K tienen un cierto interés matemático relacionado con un cálculo de los trabajos contabilizados como hombres necesarios cada día (hombres-día) llevados a cabo en la construcción de un pequeño templo, un cenotafio o una tumba (SIMPSON, 1963).

Un resumen de su contenido se muestra a continuación.

Sección	Contenido
G	Cantidades de arena utilizada o escombros producidos (*ḫmw*)
H	Volúmenes de bloques de piedra arrastrados para la construcción y la cantidad de arena utilizada
I	Diversos materiales y ladrillos
J	La distribución del trabajo en hombres-día
K	Resumen de los hombres-día con la división

por 10

El fragmento UC 32161 (XIV.1) muestra 8 líneas de escritura hierática con números muy grandes, correspondientes a las líneas 15-22.

El UC 32134A (LV.3) muestra seis líneas de texto, con la primera bastante dañada del que puede deducirse un problema de "cantidades", llamado *ꜥḥꜥw*, que fue reconstruido por Otto Neugebauer.

Del UC 32134B (LV.3) se conserva una sola línea que también está presente en los problemas 32, 33, 34, 35, 37 y 38 del PMR.

La tabla 2/n se lee en el fragmento UC 32159 (IV.2).

Dos problemas, uno de progresiones aritméticas cuyo enunciado no es compartido por todos los autores, y otro donde se calcula el volumen de un granero cilíndrico, se conservan en el fragmento UC 32160 (IV.3).

En el fragmento UC 32162 (LV.4), en una columna podemos leer el enunciado de un ejercicio "Método para calcular los asuntos de los escritos". Además se conservan dos problemas, uno referente al área de una tira de lino y el otro, un problema *bꜣkw*.

Un resumen del contenido de los fragmentos matemáticos del PK se muestra en la tabla inferior.

Fragmento	Contenido
IV.2 (UC 32159)	Tabla *2/n*
IV.3 (UC 32160)	Progresiones aritméticas
IV.3 (UC 32160)	Volumen de un cilindro
XIV.1 (UC 32161)	Números largos sin significado apreciable
LV.3 (UC 32134)	Problema *ꜥḥꜥw* con ecuación de primer grado
LV.4 (UC 32162)	Áreas y problemas *bꜣkw*

En la tablilla de **Akhmîm** además de una lista de sirvientes aparecen cinco divisiones de cocientes 3, 7, 10, 11 y 13, una de ellas repetida cuatro veces.

Los papiros copto-griegos de Akhmîm y de Michigan muestran, como hemos comentado, una serie de tablas muy completas de multiplicaciones.

El Papiro de Akhmîm, además de presentar tablas de descomposición de números fraccionarios en series de potencias, muestra diversos ejercicios de fracciones (división de un entero por otro más grande, conversiones en cocientes de un asuma de fracciones, descomposición de una suma en fracciones equivalentes, métodos para la resta de fracciones, multiplicación y división de fracciones, proporciones) (BAILLET, Le papyrus mathématique d'Akhmîm, 1892).

Feuille 1 recto, page 1, colonne 1.

ϛ	ἀρίθμῳ [Δ]		1/3 au nombre 4000		
τῆς	A τὸ ϛ ϛ	de	un les 2/3 = 2/3		
τῶν	B	A γ′	de	2	1 1/3
τῶν	Γ	B	de	3	2
τῶν	Δ	Bϛ	de	4	2 2/3
τῶν	E	Γ γ′	de	5	3 1/3
τῶν	ς	Δ	de	6	4
τῶν	Z	Δϛ	de	7	4 2/3
τῶν	H	E γ′	de	8	5 1/3
τῶν	Θ	ς	de	9	6
τῶν	I	ςϛ	de	10	6 2/3
τῶν	K	IΓ γ′	de	20	13 1/3
τῶν	Λ	K	de	30	20
τῶν	M	Kϛϛ	de	40	26 2/3
τῶν	N	ΛΓ γ′	de	50	33 1/3
τῶν	Ξ	M	de	60	40
τῶν	O	Mϛϛ	de	70	46 2/3
τῶν	Π	NΓ γ′	de	80	53 1/3
τῶν	ϙ	Ξ	de	90	60
τῶ[ν	P]	Ξϛϛ	de	100	66 2/3
τῶ[ν	Σ]	PΛΓ γ′	de	200	133 1/3
τῶ[ν	T]	Σ	de	300	200
τῶ[ν	Υ]	ΣΞϛϛ	de	400	266 2/3
τῶ[ν	Φ]	TΛΓ γ′	de	500	333 1/3
τῶ[ν	X]	Υ	de	600	400
τ[ῶν	Ψ]	ΥΞϛϛ	de	700	466 2/3
τῶν	Ω	ΦΛΓ γ′	de	800	533 1/3
τῶν	↑	X	de	900	600
τῶν	͵A	XΞϛϛ	de	1000	666 2/3
τῶν	͵B	͵ATΛΓ γ′	de	2000	1333 1/3
τῶν	͵Γ	͵B	de	3000	2000
τῶν	͵Δ	͵BXΞϛϛ	de	4000	2666 2/3
τῶν	͵E	͵ΓTΛΓ γ′	de	5000	3333 1/3
τῶν	͵ς	͵Δ	de	6000	4000
τῶν	͵Z	͵ΔXΣϛϛ	de	7000	4666 2/3
τῶν	͵H	͵ETΛΓ γ′	de	8000	5333 1/3
τῶν	͵Θ	͵ς	de	9000	6000
τῶν	͵I	͵ςXΞϛϛ	de	10000	6666 2/3

Ilustración 14. Tabla de 2/3 del papiro griego-copto de Akhmîm (BAILLET, Le papyrus mathématique d'Akhmîm, 1892, pág. 24).

El PM contiene una serie de tablas de fracciones desde 1/7 a 1/18 escritas en copto y con numeración en griego. El procedimiento griego de expresar números fraccionarios utiliza las mismas letras de su alfabeto a las que se asignan diferentes valores numéricos, añadiendo una barra encima, lo habitual, o un apóstrofe como en los papiros de Akmîm y de Michigan.

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ο
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	
100	200	300	400	500	600	700	800	

Ilustración 15. Tabla numérica griega (fuente: http://www.escolares.net/matematicas/sistemas-de-numeracion/).

Las fracciones construidas con un entero en el numerador sobre la unidad en el denominador, que aparecen en la primera entrada de cada tabla, repiten el numeral dos veces ($\theta'\theta'$ se corresponde con 9/1). La segunda entrada es llamativa indicando la fracción que multiplicada por el encabezamiento da 6.000 seguramente debido a la relación monetaria entre talentos y dracmas. Un talento (τάλαντον), moneda de origen babilonio, ampliamente distribuida por todo el Mediterráneo podría equivaler a 26-27 Kg., a 6.000 dracmas (δραχμαί). Esta línea de las tablas sugiere un uso comercial de las tablas (ROBINS F. , 1923, pág. 328), posiblemente por recaudadores de impuestos (KARPINSKI L. C., 1922, pág. 24), que se asimila al Papiro de Akhmîm por su semejanza con el PM, aunque en aquel se hayan añadido problemas matemáticos (ROBINS F. , 1923, pág. 329).

El documento no hace distinción para expresar números enteros y fraccionarios. Así podemos encontrar γ' como 3 o como 1/3. de hecho $\gamma'\gamma'$ se usa para expresar 3 1/3, lo que podría confundirnos con 3/1 como explicamos anteriormente.

Entre las 196 coincidencias entre el PM y el de Akhmîm solamente se han observado 19 variaciones, de las que en 5 interviene la fracción 2/3.

El texto copto-griego del PM tomado del ROBINS (1923, págs. 330-333) se expone en el anexo 14, al igual que una traducción de las columnas referidas a la fracción 1/9 y 1/11, tomadas de KARPINSKI (1922, págs. 21-22).

En el **Papiro Ayer** se han escrito en él tres ejercicios geométricos cuyo desarrollo matemático presentamos en el anexo 13. En dos de ellos se calcula el área de un trapecio escaleno. En el primero las dos bases paralelas miden 2 y 16 unidades, y los lados convergentes 13 y 15 unidades (GOODSPEED, 1898, págs. 28-32).

Entre las numerosas tablas de Nicolás Artavasde Rhabda destacamos una con productos de los primeros diez enteros por las fracciones 3/2, 2/3, 1/2, 1/3....1/10. De las 110 entradas, 100 se repiten en el Papiro de Akhmîm con nueve variaciones y 30 en el PM. (KARPINSKI L. C., 1922, pág. 23).

División y estructura de los textos matemáticos

Desde un punto de vista global podemos dividir los manuscritos matemáticos en dos grandes grupos:

1. **Tablas**, cuyo principal exponente es la 2/n del PMR, aunque también se copiaron en otros textos como los fragmentos del PK. Incluso podríamos considerar como tal la serie de divisiones n/10 del PMR, donde n representa uno de los nueve primeros dígitos.

2. **Problemas** de los que han llegado hasta nosotros más de un centenar y abarcan un amplio espectro tanto en el campo de la Aritmética como de la Geometría. Los manuscritos que los incorporan pueden ser simples manuales para el aprendizaje o cuadernos de prácticas del alumno.

La mayor parte de los ejercicios de los manuscritos tienen una estructura bien definida, en muchos casos con frases estereotipadas, lo que nos hace pensar en una clara intención pedagógica dirigiendo nuestra mirada hacia que se trate de manuales docentes más que de ejercicios de un alumno avanzado. Constan de varias secciones no siempre presentes en todos los casos

a) Un encabezamiento que muestra el enunciado del problema que el amanuense inscribió en rojo en muchas ocasiones.

b) Datos del ejercicio.

c) La pregunta o cuestión formulada.

d) Las instrucciones que permiten el desarrollo del mismo.

e) Las operaciones llevadas a cabo.

f) El resultado final.

g) En algunas ocasiones pruebas que comprueban la veracidad del resultado, la exactitud numérica, no como las pruebas aportadas por los griegos encaminadas a la demostración de fórmulas y teorías (COUCHOUD, 2004).

Ritter (RITTER, 1995) los clasificó en tres grupos bien definidos:

1. **Retóricos**, aquellos que van acompañados de un texto en prosa, lo que los hace más cercanos a la vida cotidiana. Como ejemplo, los problemas *b3kw*.

2. **Numéricos** o de práctica aritmética.

3. **Algorítmicos** cuando se desarrolla una secuencia de instrucciones que nos permiten solucionar el ejercicio.

El lenguaje y la gramática de los manuscritos

Una de las características de las ciencias modernas es la utilización de un lenguaje específico (ej.: la Medicina) y las Matemáticas egipcias no podía ser menos. Encontramos vocablos especiales en los enunciados de los problemas, así como la utilización de otras palabras de uso común con acepciones diferentes en los manuscritos matemáticos.

---

[1] La existencia de esclavos en Egipto, tal como los conocemos hoy, no está bien documentada en la actualidad.

[2] Kelly Simpson piensa que los textos referentes a los aspectos matemáticos del manuscrito se escribieron entre el día 16 de la cuarta estación del mes de 'peret' y el 20 de la segunda estación de 'shemu' del reinado de Senuseret I (Sesostris I) (SIMPSON K. , 1963, pág. 22).

[3] En algunos casos los resultados de las fracciones no son coincidentes con los expresados en el PMR. Así $\frac{3}{10}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$, mientras que el PMR tenemos $\frac{3}{10}=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$; para $\frac{7}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$ en vez de $\frac{7}{10}=\frac{2}{3}+\frac{1}{30}$; para $\frac{8}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$ en vez de $\frac{8}{10}=\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$; para $\frac{9}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ en vez de $\frac{9}{10}=\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{30}$.

[4] Se conoce como ***recto***, la parte del papiro en la que las fibras están insertadas horizontalmente, y en la parte opuesta, el ***verso*** las fibras son verticales.

El sistema numeral egipcio

Nace en concordancia con la aparición de la escritura, yendo de la mano durante toda la historia de la lengua egipcia, pero una vez llegado el copto, los números se expresan fonéticamente o utilizando el sistema griego de numeración.

Al comienzo de la época dinástica los conocimientos matemáticos se hicieron necesarios debido a varios factores. El primero, el incremento de la **burocracia** con constantes recuentos de ganado y cereales que los escribas anotaban concienzudamente en rollos de papiro. El segundo, la demanda de grandes **construcciones** que los faraones deseaban llevar a cabo, entre las que destacaron las mastabas[5], las pirámides y los grandes templos, muchas de ellas con connotaciones astronómicas y geométricas que necesitaron de un enorme desarrollo matemático. Y un tercero, el reparto, **compra**, cesión y donación de terrenos que necesitaba una aritmética precisa en el cálculo de las áreas.

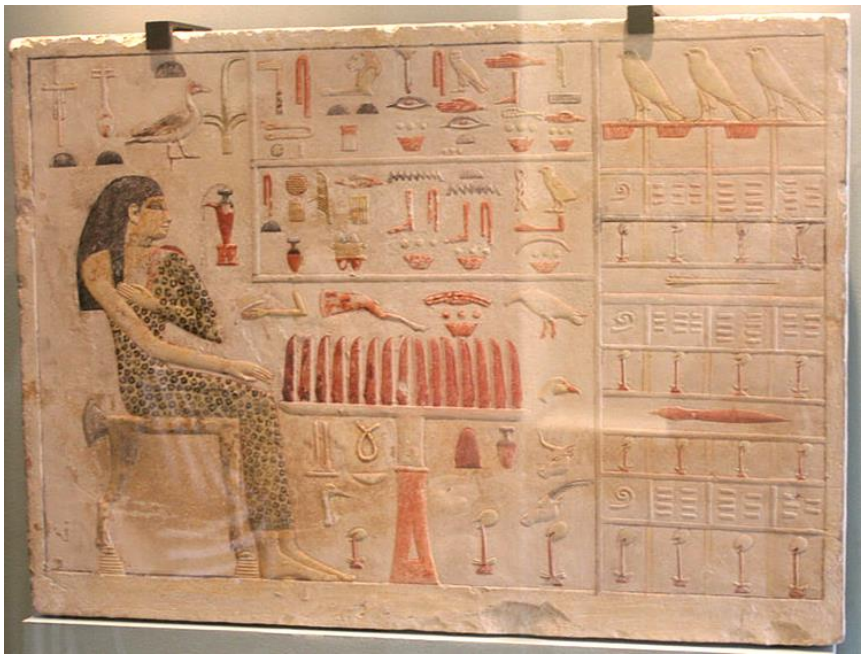


Ilustración 16. Estela de la princesa Neferetiabet de la IV dinastía, custodiada en el museo del Louvre.

El uso de los números por los egipcios es, al menos, tan antiguo como el ascenso al trono del primer rey dinástico **Narmer** (Menes) como vimos en la inscripción presente en su maza ceremonial donde aparece una pequeña lista de capturas, y posiblemente coetáneo con la aparición de los primeros jeroglíficos.

Ilustración 18.Ilustración 21. Piedra de Palermo, una estela de diorita anfibólica donde se inscribieron los anales de los reyes egipcios desde la I a la V dinastía.

Un ejemplo de su conocimiento y uso de los numerales durante el Reino Antiguo se puede ver en la estela de la princesa **Neferetiabet**, que vivió en la IV dinastía durante el reinado del faraón **Khufu** (Keops).

La anotación de cifras en las tumbas de los primeros tiempos dinásticos no fue infrecuente,

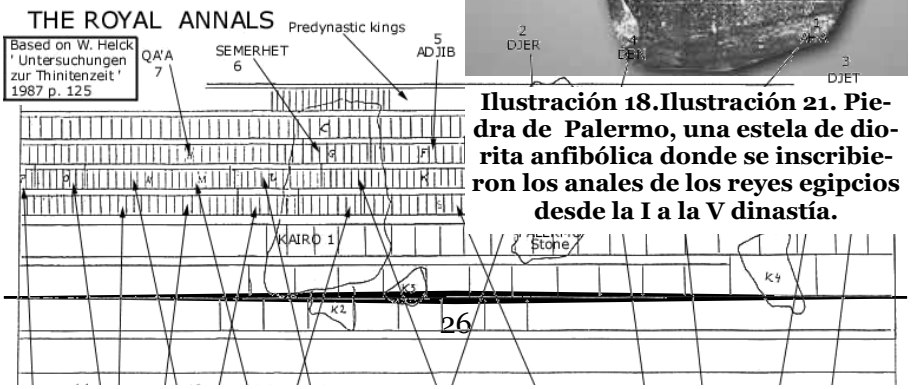


Ilustración 17.Esquema de la situación de los distintos fragmentos conocidos de los Anales dinásticos.

pero se hace muy patente en la llamada Piedra de Palermo, una estela de diorita anfibólica de 2 m. de altura, unos 60 cm. de anchura y 6,5 cm. de espesor, donde se inscribieron los anales reales desde la I a la V dinastías.

Otros fragmentos de este monumento se encuentran custodiados en el museo Egipcio de El Cairo (tres adquiridos en 1910 en el mercado de antigüedades – JE 44859, JE 39735 y JE 39734 – otro, descubierto en Menfis – JE 44860 -, y otro, JE 18220, adquirido por Cenival en 1963) y en el University College de Londres (UC 15580).

En el tema que nos ocupa, la presencia de los números, la Piedra de Palermo aporta algunos datos. El primero, la inscripción habitual de la altura alcanzada por la crecida del Nilo medida en construcciones especiales ya sean escalonadas o cilíndricas, llamadas **nilómetros**, ubicadas en lugares estratégicos. Los más famosos son el escalonado de la isla de Elefantina en Asuán y el cilíndrico del templo de Kom Ombo. Nos permite conocer, además de los primeros numerales, algunas de las medidas de longitud, el codo, el palmo y los dedos.

La primera medida referenciada aparece en la Piedra de Palermo en el reinado de Djer (I dinastía), coincidiendo con la mayor crecida referencia, 6 codos (3,174 m.).

... (x+3) seis codos... (x+5) cuatro codos y un palmo (JIMÉNEZ, 2004, pág. 33)

El segundo, la enumeración de los años de censo del ganado mayor y menor (*ṯnwt*) que se realizaban cada dos años como podemos deducir del texto siguiente.

Reinado de **Ninetejer** (x+3) cuarta ocasión del censo... (x+5) quinta ocasión del censo... (x+7) sexta ocasión del censo... (x+9) séptima ocasión del censo (JIMÉNEZ, 2004, págs. 44-46).

Este sistema de control nos permite deducir los años de reinado de un monarca a partir de los censos realizados durante su gobierno. Basta con multiplicar por 2 el último censo que aparece en la Piedra de Palermo para determinar con un error de 1 año el tiempo de reinado de un monarca, siempre que se cumpla rigurosamente el censo bianual.

Además también reconocemos jeroglíficos numerales en la

anotación de los festivales heb-sed o de regeneración, documentados desde el Reino Antiguo en la Piedra de Palermo, que debía afrontar el monarca para comprobar su capacitación para el gobierno. El rey celebraría el primero de ellos a los 30 de su ascenso al trono. Posteriormente se repetían cada 3 años. La realización de esta ceremonia sirve para conocer que un faraón reinó al menos 30 años, por lo que no todos los reyes celebraron este evento.

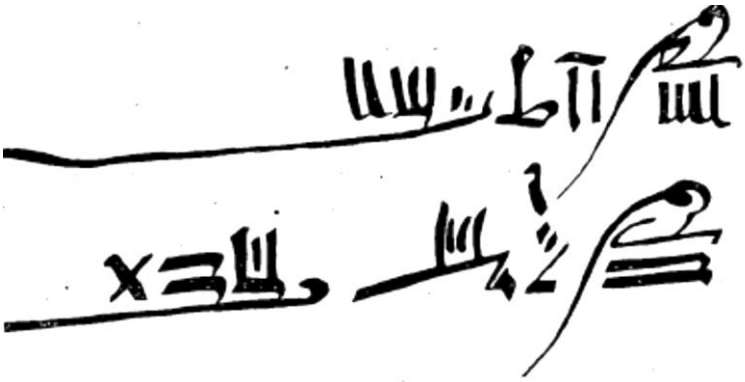
La adquisición y donación de terrenos está documentada muy pronto en la Historia de Egipto. En la tumba de Metjen (L6), un alto funcionario del Reino Antiguo, construida al norte de la pirámide escalonada del Djeser (Zoser) en el yacimiento arqueológico de Saqqara, encontramos datos referidos a transacciones de campos medidos en aruras, una unidad de superficie equivalente a 100 codos cuadrados, remontando los conocimientos agrimensores egipcios a la III dinastía, una vez reforzado el estado.

He adquirido mediante un pago un campo de 200 aruras... Ha dado un campo de 50 aruras a su madre Nebsenet (Urk I 2, 8-9) (SETHE, 1903-33).

Otro de los aspectos importantes en la utilización del sistema numérico fueron sin duda las dataciones reales de las que hablaremos más adelante con detalle.

La numeración egipcia

El primero en reconocer la notación numérica de los signos jeroglíficos hasta el 1.000 fue M. Jomard, a los que Champollion añadió el signo relativo a las decenas de mil (DEVÉRIA, 1862, pág. 253). Quedaban por interpretar los signos que expresaban las centenas de mil y el millón. En una plancha litografiada del museo Británico de Londres que contenía algunos ejemplos de recuento de bienes de bienes para el templo de Amón en Karnak, Jomard[6] apareció en un texto hierático el signo del renacuajo (I8 de la lista de Gardiner) sobre el numeral 4 y delante de una serie numérica más larga relacionada con el ganado



... que se repetía debajo con otra serie numérica diferente, sobre el numeral 8, relativa a los campos, deduciendo que se trataba del signo representativo de las centenas de millar.

El sistema numeral quedó completado al comienzo de la V dinastía (CLAGETT, 1999, pág. 6).

No podemos hablar con propiedad de un sistema numeral egipcio, pues como muchos de los pueblos de la antigüedad utilizaban grafías jeroglíficas consonánticas para definir valores numéricos, de forma semejante a las letras romanas (I=1; V=5; X=10; L=50; C=100; D=500; M=1.000) o hebreas, aunque combinadas con signos específicos numéricos (los palotes que definen los números de la primera decena desde el 1 al 9). Incluso en nuestros días quedan reminiscencias de un sistema vigesimal presente en la lengua francesa (quatre-vingts, cuatro veces 20, es ochenta).

Si comparamos Egipto con la otra gran civilización de la época, la mesopotámica, observaremos una clara discrepancia en sus matemáticas. Los sabios mesopotámicos utilizan un sistema sexagesimal (van der WAERDEN, 1961), mientras que los egipcios adoptaron un sistema **decimal**, aunque diferente del arábigo que utilizamos en la actualidad, puesto que carece de cifras significativas y es aditivo. Esto quiere decir que el valor no dependerá de la posición que ocupe un número concreto, sino de la suma de los valores intrínsecos a cada signo. El procedimiento tiene un claro inconveniente pues hace la escritura de números grandes muy tediosa al tener que repetirse varias veces los mismos signos, como ocurre con la numeración romana. Cuando se necesita utilizar 10 signos de un valor determinado se reemplazan por un signo de orden superior. Los valores más altos se sitúan al comienzo de la escritura (si es de derecha a izquierda, a la derecha, y viceversa).

Para escribir el número 327 en la actualidad usamos 3 cifras,

cada una de ellas con un valor diferente debido a su posición (300 + 20 +7), mientras que los egipcios necesitarían 12 (3 + 2 + 7): tres signos que representan centenas, dos decenas y 7 unidades.

Desde el punto de vista mitológico el sistema decimal egipcio fue creado por el dios Thot (Djehuty) como parece deducirse de un texto del capítulo 17 del Libro de los Muertos, un conjunto de plegarias, himnos y textos de orden religioso que facilitarían el camino del difunto hacia los Campos del la Felicidad.

He reconstituido el ojo después de haberse apagado el día de la lucha de los dos combatientes. ¿Qué significa esto? Se trata del día en el que Horus combatió contra Seth, cuando éste arrojó las inmundicias a la cara de Horus, y Horus destruyó los testículos de Seth. Sin embargo, Djehuty (Thot) con sus dedos lo creó.

En esta reconstrucción del ojo de Horus con los diez dedos algunos autores han querido ver la implantación del sistema decimal restaurando el conocimiento ancestral.

Pero, al igual que nosotros utilizamos un sistema sexagesimal para la medición del tiempo y de los ángulos, los egipcios usaron sistemas no decimales en las medidas como veremos más adelante en el capítulo dedicado a ellas.

La escritura jeroglífica utiliza **palotes**, un método sencillo y ancestral de contar, para expresar los nueve primeros dígitos y signos jeroglíficos para las decenas, centenas, millares, decenas de mil, centenas de mil (cinco signos diferentes), a los que hay que añadir, a partir de la V dinastía el signo representativo de millones (CLAGETT, 1999).

La grafía jeroglífica de las siete primera potencias de 10 es la que se muestra en la siguiente tabla.

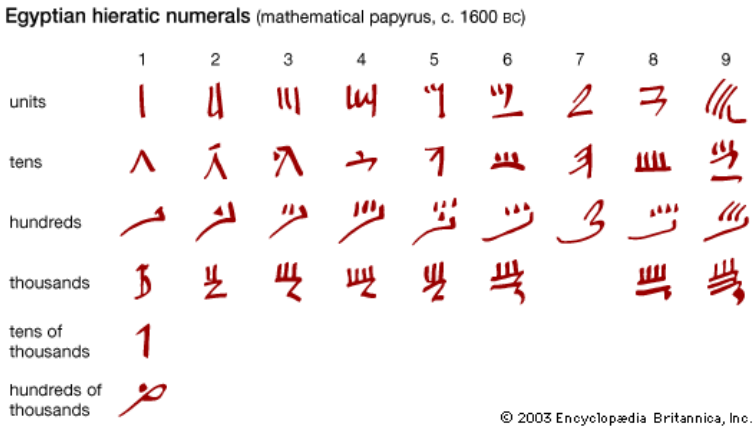
10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
mḏw	*št*	*ḫ3*	*ḏbʿ*	*ḥfn*	*ḥḥ*

Los nombres de los primeros nueve dígitos son: 1 – *wʿ*(*yw*); 2- *snw*(*y*); 3- *ḫmt*(*w*); 4 – (*j*)*fdw*; 5- *djw*[7]; 6 – *srsw/sjsw*; 7 – *sfḫ*(*w*); 8 – *ḫnm*(*w*); 9 – *pšd*(*w*). Y los de las nueve decenas: 10 – *mḏ*(*w*); 20 – *ḏbʿty*; 30 – *mʿb3*; 40 – *ḥm*; 50 *ḏjyw*; 60 – *sr*(*syw*)/*sj*(*syw*); 70 – *sfḫ*(*yw*); 80 – *ḫmn*(*yw*); 90- *pšdyw* (GARDINER, 1957).

El numeral que expresa un millón, se utiliza también para indicar un gran número de cosas. Se relaciona con la divinidad Heh (JÉQUIER, 1922, pág. 474), un genio, símbolo de lo infinito, de la eternidad y representante del los millones de años de vida del rey, que no tuvo un centro específico de veneración (CASTEL, 1995, págs. 123-124).

Si exceptuamos las inscripciones en tumbas y templos, así como algunos otros monumentos pétreos, los números en jeroglíficos son poco frecuentes. La mayoría de los documentos matemáticos están, como ya comentamos, escritos en **hierático**, considerando que su escritura está ampliamente difundida desde comienzos del Reino Medio, como se aprecia en las fuentes documentales presentadas. Al entrar en juego la escritura hierática y debido al aumento en la velocidad de manipulación y la utilización del pincel sobre el papiro los palotes se agrupan dando grafías que asemejan verdaderos números, difícilmente identificables en algunos casos, como herederos de los signos jeroglíficos correspondientes. Para escribir 327 utilizábamos 12 signos jeroglíficos, pero solamente 3 hieráticos: uno para expresar 300, otro para el 20 y otro para el 7. Esto no significa en modo alguno que los egipcios tuvieran en mente el concepto de cifra con valor dependiendo de la posición, sino que simplemente diseñaron un signo para cada unidad, uno para decena, otro para cada centena...

La numeración hierática es



Otras características del sistema numeral egipcio, al igual que en otras lenguas orientales de la época, es que **carece de puntos decimales**, pues no los necesita al no existir cifras con valor posicional, y del **cero**, que no llega a Europa hasta finales del siglo XII o comienzos del XIII, aunque el concepto podría estar en su

mente.

El vocablo cero procede del sánscrito "shunya" (vacío) que derivó en el árabe "sifr"(صفر), que probablemente daría lugar a la palabra 'cifra' en castellano[8].

A pesar de no necesitar el cero porque al no utilizar cifras posicionales no existirán huecos vacíos en los números, un valor nulo se hace necesario para marcar el ras o nivel en las construcciones. En estas ocasiones los egipcios utilizaron el símbolo *nfr*, como aparece algunos balances en el papiro Boulaq 18 (GRIFFITH F. L., 1894, pág. 167).

En algunos textos ptolemaicos se utiliza para expresarlo *jwty* 18 (GRIFFITH F. L., 1894, pág. 167).

No se conoce el concepto de infinito matemático ni su expresión jeroglífica.

Ilustración 19. Los primeros números en demótico (fuente: Demótico Hierático Jeroglífico de los Números de la Ciencia de Mackenzie C1880).

De forma diferente a la lengua egipcia escrita en jeroglíficos, hierático o demótico, en el dialecto Sahídico copto, los numerales son, por lo general, escritos fonéticamente, mientras que en Bohairíco y Fayúmico siguen el modelo griego y se escriben con las letras del alfabeto con una barra horizontal sobre ellas, y una doble barra para los millares (VERGOTE, 1983, pág. 138) (TILL, 2010, pág. 54) (PLUMLEY, 1948, pág. 16).

La tabla de números en copto es

1	2	3	4	5	6	7	8	9
ⲁ̅	ⲃ̅	ⲅ̅	ⲇ̅	ⲉ̅	ⲋ̅	ⲍ̅	ⲏ̅	ⲑ̅
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ⲓ̅	ⲕ̅	ⲗ̅	ⲙ̅	ⲛ̅	ⲝ̅	ⲟ̅	ⲡ̅	ⲕ̅
100	200	300	400	500	600	700	800	900
ⲣ̅	ⲥ̅	ⲧ̅	ⲩ̅	ⲫ̅	ⲭ̅	ⲯ̅	ⲱ̅	ϯ

La construcción de los cardinales y los ordinales

Se denominan cardinales, según el diccionario de la Real Academia Española (RAE), aquellos números enteros en abstracto.

Como regla general los numerales en egipcio siguen al **sustantivo al que determinan mostrándose éste en singular,** aunque hay frecuentes excepciones.

Cuando el numeral correspondiente a la unidad se convierte en un verdadero artículo indeterminado, lo que ocurre con más frecuencia en neoegipcio a finales de la XVIII dinastía, se situará delante del nombre enlazado por la preposición *n* (*wꜥ n pr* 'una casa') o *m* (*wꜥ m pr* 'una de las casas').

Los numerales 1.000 y 1.000.000 muchas veces anteceden al nombre, frecuentemente en la enumeración de ofrendas en las estelas funerarias. Eso mismo ocurre, a veces, con las centenas (GARDINER, 1957).

Los ordinales son, también según la RAE, aquellos números que expresan ideas de orden o sucesión. Los egipcios los construyeron adicionando al cardinal una desinencia en *-nw* ( ) para aquellos que determinan un sustantivo masculino o *-nwt* ( ) para los femeninos, a excepción de 'primero' que se escribe *tpy* (o) o *tp* ( ) para los nombres masculinos y *tpt* ( ) para los femeninos.

Los ordinales por encima del décimo se forman anteponiendo al cardinal correspondiente el participio del verbo llenar, *mḥ* ( ) para sustantivos masculinos y *mḥt* ( ) para los femeninos.

m wḏyt mḥt 13 nt nḫt

(Fue en el año de reinado 38 cuando estaba su majestad en el país de Djahy) en su decimotercera campaña de victoria.

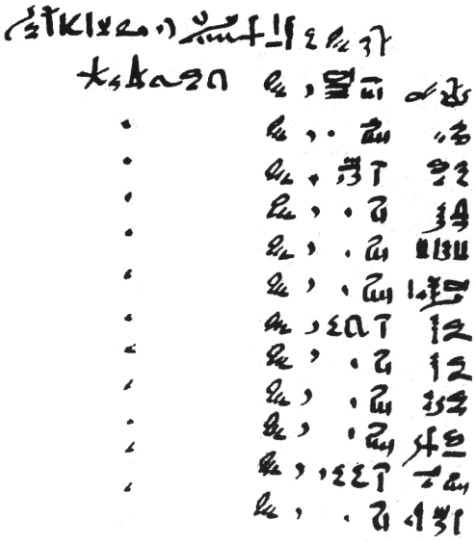
El año egipcio

La creación de un calendario precisa, sin lugar a dudas, de un sistema de contaje junto con un estudio detallado de los fenómenos astronómicos, los ciclos lunares (la traslación de la Luna alrededor de la Tierra) y solares (la traslación de la Tierra alrededor del Sol de-

volviendo al astro rey al cabo de un año a una relativa posición equivalente a la del año anterior). Para las primeras tribus neolíticas que alcanzaron el valle del Nilo es probable que el ciclo lunar con sus cuatro fases fuera la base de un calendario lunar que luego iría desapareciendo progresivamente, pudiendo quedar alguna reminiscencia en los templos a custodia de los sacerdotes astrónomos.

En un periodo más avanzado, cuando las tribus nómadas se asentaron, los egipcios empezaron a utilizar un calendario solar agronómico de 365 días, definiéndose un año como el periodo de tiempo existente entre dos cosechas consecutivas (MONTET, 1993), reforzado por las observaciones astronómicas, como la salida de la estrella Sirio, la más brillante del firmamento norte, por el horizonte a primera hora de la noche.

Los sacerdotes aunque conocieron el año "bisiesto" de 366 días cada cuatro años no lo aplicaron a su calendario civil, hecho por el cual año a año se establecería una discrepancia entre el año astronómico y el civil, como leemos en un pequeño calendario que nos ha sobrevivido en el papiro médico Ebers escrito en hierático.



... fechado en el año 9 de reinado bajo la majestad del rey del alto y bajo Egipto **Djeserkara** (Amenhotep I), ¡que viva eternamente! La aparición de Sirio, el día de Año Nuevo, es el día 9 del tercer mes de la estación de shemu.

Si como todas las pruebas indican el inicio del calendario civil se relaciona con el día de la aparición sotíaca, el día de Año Nuevo debería coincidir con la salida del astro (1 del primer mes de la estación de *akhet*) y no varios días después, el día 9 de la estación de la

recolección. Esto nos reafirma en asegurar que el calendario quedó establecido de forma fija en 365 días, generando un desfase de 1 día cada 4 años, lo que explicaría la fecha que aparece en el papiro Ebers como día de Año Nuevo.

Según narra Heródoto

Los egipcios fueron los primeros hombres del mundo que describieron el ciclo del año, dividiendo su duración, para conformarlo, en doce partes (HERÓDOTO, 1992).

El año civil egipcio, *rnpt* constaba, como hemos anticipado, de 365 días distribuidos en tres estaciones *tr* ( ) no relacionadas con la posición solar a lo largo de la eclíptica, sino con un cierto carácter agronómico relacionado con las cosechas: *akhet* (*3ḫt*) o periodo de la inundación, *peret* (*prt*) o de la siembra, y *shemu* (*šmw*) o de la recolección. Las estaciones se subdividían en cuatro meses (*3bd*) con tres semanas de 10 días.

Aunque los nombres de los meses variaron de unos periodos a otros de la historia egipcia daremos la versión del papiro Ebers. Los meses de la estación de *akhet* eran Tekhet, Menkhet, Hathor y Kaherka, los de *peret*, Shefbedet, Rekeh I, Rekeh II y Renenutet; los de *shemu*, Khonsu, Khenkhet, Apethemet y Upetrenpet.

En el Reino Nuevo eran Djehuty (Thot), Paenipet, Hathor y Kaherka en la estación de *akhet*; Taab, Mekyr, Paenamenhotep y Paenrenenutet en la estación de *peret*; Paenkhonsu, Paeninet; Ipep y Mesutra en la estación de *shemu*.

Un pequeño cálculo 30 x 12 = 360 nos indica que faltan cinco días para conseguir el cómputo de 365. Para completar el año civil se añadieron cinco días extra llamados epagómenos (*hrw rmpt*), del griego ἐπαγόμεναι, asociados a cinco de las grandes divinidades egipcias: Osiris, Horus, Seth, Isis y Nephtys. Su origen se asocia al nacimiento del calendario, anterior a la IV dinastía. Estos días aparecen en una inscripción en la tumba de Nekankh en Tehneh, un funcionario egipcio que vivió a caballo entre la IV y V dinastías, donde delega funciones sacerdotales y un terreno de 5 aruras asociados a

ellas a su esposa y a sus hijos.

Para la conocida del rey Hedjetjehenu un campo de 5 aruras en los cinco días epagómenos y durante el primer mes de la estación de akhet (SETHE, 1903-33).

Estos datos se ven refrendados por un pequeño fragmento de los Textos de las Pirámides.

El nacimiento de los dioses está ante ti durante los cinco días epagómenos (FAULKNER, 1969).

Las primeras fechas de las que tenemos noticia se remontan a los anales de la Piedra de Palermo, en los reinados de Aha y Djer, monarcas de la I dinastía, se lee

... el día 6 del séptimo mes (JIMÉNEZ, 2004, pág. 32). La fecha final del reinado de Aha

...el día 13 del cuarto mes, (se celebró la ceremonia) de la unión de las Dos Tierras y de la circunvalación del muro (JIMÉNEZ, 2004, pág. 33). El comienzo del reinado de Djer.

Las dataciones reales

En la actualidad en la mayor parte del orbe se usa el calendario gregoriano, tomando como origen del año 1, asociado al nacimiento de Jesús de Nazaret.

La era cristiana se inaugura el año 607 con el Papa Bonifacio IV gracias a los estudios de Dionisio el Exiguo (470-544 d.C.), un monje rumano que estableció el nacimiento de Jesús el 25 de diciembre del año 754 después de la fundación de Roma.

Con anterioridad, en época romana, los años se contabilizaban a partir de la fundación de Roma por Rómulo y Remo.

El calendario juliano surge por la necesidad de subsanar las discrepancias entre el calendario civil y el astronómico. Sosígenes, un sabio alejandrino, conocedor de la reforma fallida del decreto de Canopus egipcio, plantea a Julio César en el año 46 a.C. la conveniencia de crear un nuevo calendario que se ajuste mejor a la realidad. De esta forma queda establecido que a partir del año 44 a.C. los años tendrán 365 días con un año bisiesto, llamado así por la duplicación del 24 de febrero, cada cuatro años.

La nueva reforma, la actual, el calendario gregoriano, surge por razones puramente religiosas. En el I Concilio de Nicea se determinó que la Pascua se celebraría el domingo siguiente al plenilunio que siguiera al equinoccio de primavera (ese año ocurrió el 21 de marzo). El anterior calendario juliano establecía un año civil promedio de 365,25 días lo que generaba un desfase de 11 minutos anuales con el año trópico (tiempo que tarda la Tierra en su traslación alrededor del Sol en volver a una posición equivalente a la del año anterior en el equinoccio de primavera) que dura 365,242189 días. En el año 1582 se había acumulado un error de 11 días y el Papa Gregorio XIII emite la bula Inter Gravissimas donde se establece un retraso de 26 segundos por año lo que lleva a eliminar como años bisiestos los múltiplos de 100 a excepción de los múltiplos de 400. De esta manera el año promedio es de 365,2425 más próximo al valor del año trópico. Esta es la causa de que exista un salto en el calendario pasándose del 4 de octubre de 1582 al 15 de octubre del mismo año.

Los egipcios no tenían una fecha fija de inicio de su calendario como los romanos o nosotros, sino que registraron los años a partir de la fecha de coronación de un monarca, contabilizándose los meses y los días según el calendario civil. Así la coronación de Thutmose I se registra *en el primer año de reinado, el tercer mes de la estación de peret, el día 21, día de la fiesta de la coronación* (SETHE, 1903-33).

---

[5] Palabra que deriva del árabe y significa "banco". Son construcciones funerarias en forma de tronco de pirámide. El problema 14 del PMM muestra cómo calcular el volumen de un tronco de pirámide lo que podría estar relacionado con la construcción de estos edificios.

[6] Este mismo autor da el valor de decenas de millón al signo ♀ que aparece en una secuencia numérica en un bajorrelieve del rey Amenhotep III (Denkmäler III 76, b) que no he podido localizar en la inscripción.
Este mismo autor hace referencia a que Jomard asigna el número 5 al signo ⋆ (signo N14 de la lista de Gardiner), lo que se ve corroborado por Brugsch (1865, págs. 66-ss) y Lepsius (1865, págs. 101-ss).

[7] La palabra para expresar el número 5 pudo estar relacionada con el vocablo que significa mano *ḏrt / drt*, por los cinco dedos de la misma (JÉQUIER, 1922, pág. 474).

[8] El ***cero*** puede tener, en nuestra nomenclatura actual, dos valores bien diferenciados. En primer lugar la carencia de algo numérico, lo que podríamos llamar el ***cero absoluto*** (no hay nada, luego hay cero). En segundo lugar, dada la forma que tenemos de escribir las cifras, el cero es, también, un lugar en una cifra, que indica la carencia de ese orden numérico. Así no es lo mismo 101, que 11 (las matemáticas babilónicas no distinguían entre estos dos resultados), pero se ha localizado una tablilla de arcilla en escritura cuneiforme en *Kish*, al este de *Babilonia*, fechada alrededor del año 700 a.C., donde se escribieron tres ganchos para indicar la existencia de un lugar vacío (un cero primordial). En otras tablillas de la misma época, solamente se ha esculpido un gancho. Llama la atención que nunca se utilizan estos trazos al final de un numeral. Este uso del cero no es el estrictamente matemático.

Los matemáticos griegos no necesitaron el uso del cero, ya que la mayoría de sus trabajos son trabajos geométricos, utilizando longitudes que no pueden expresar en ningún caso el cero, puesto que siempre tendrán un valor real. Como excepción a esta regla, están los astrónomos griegos, entre los que el uso de un símbolo para el cero se hace necesario. Se ha pensado que la notación cero derivaría de la letra griega omicrón (Ω), pero tiene el valor numérico 70, por lo que parece improbable que se dé a la misma letra dos valores diferentes.

El *Almagesto* de *Ptolomeo* (130 d.C.) utiliza un sistema matemático sexagesimal, herencia babilónica, pero incluye el cero como lugar vacío, incluso al final de una secuencia numérica. La idea del cero aparece, también como lugar vacío, en la matemática hindú (para algunos como herencia de los astrónomos griegos) tomando como notación un punto, también utilizado a modo de incógnita para designar un valor desconocido, y algunos autores defienden la posibilidad de que fuera invención hindú y que estaría como concepto religioso varios milenios a.C. (MUKHERJEE, 1991), pero se conoce que en los alrededor del siglo VII d.C., los hindúes utilizaban el cero. El primer dato fidedigno del cero en la civilización hindú se remonta al año 876 d.C. en una tableta de piedra donde aparecen los números 270 y 50 con el símbolo del cero en un tamaño menor al resto de la numeración.

El matemático hindú *Brahmagupta* observa que al restar un número de sí mismo se obtiene el cero (uso del cero como valor numérico). Realiza un amplio estudio de las operaciones que envuelven al cero y a los números negativos.

De otro lado, los pueblos mayas, a mediados del siglo VII d.C. utilizan un sistema de base 20 con el cero como elemento de lugar vacío.

Es el trabajo del árabe *Al-Khwarizmi*, *Al'Khwarizmi on the Hindu Art of Reckoning*, el que confirma sin lugar a dudas la utilización del cero como lugar vacío en cualquier posición de la cifra.

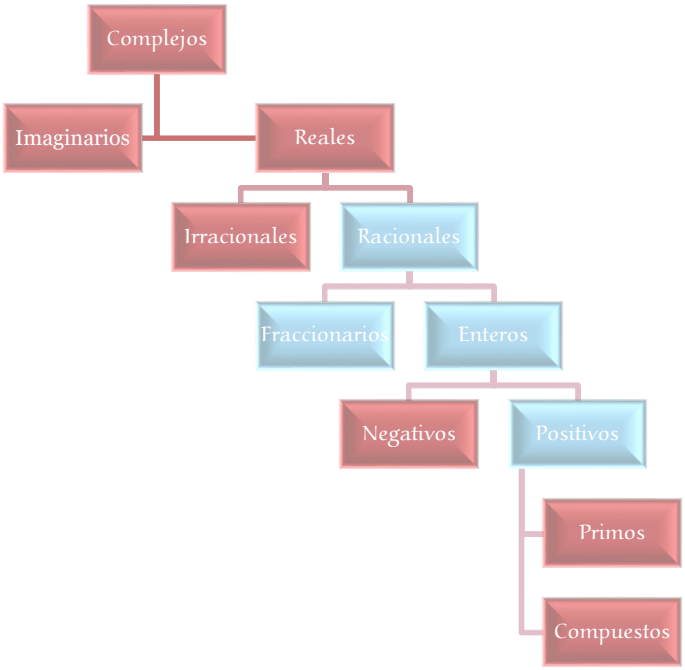
En 1247, el matemático chino *Ch'in Chiu-Shao* utiliza el símbolo “0” para expresar el cero.

Los números racionales positivos

Hemos visto que los egipcios no tuvieron dificultad alguna para la utilización de los números enteros positivos, originados por la necesidad del contar, pero no encontramos en sus textos traza alguna de los números negativos, que fueron utilizados por primera vez en ábacos con bolas de colores (negras para los positivos y rojas para los negativos) por los chinos alrededor del siglo V d.C., pero in alcanzar una trascendencia matemática hasta que Euler define el producto $(-1)(-1) = +1$. Sin embargo conocieron el uso de las fracciones, como identificadores de reparto, aunque no las utilizaron del mismo modo que hoy en día.

Los números racionales son aquellos que pueden representarse como el cociente entre dos enteros con cociente distinto de cero. Se clasifican en enteros (carecen de parte decimal) y fraccionarios (tienen una parte decimal, ya sea exacta, periódica pura o periódica mixta[9]).

El conjunto de números se puede clasificar del siguiente modo



El primer dato conocido hasta la fecha de la utilización de las fracciones en Egipto se retrotrae a la famosa Piedra de Palermo en el reinado de Den, un rey de la I dinastía, al reflejar la altura alcanzada por la crecida del Nilo en los nilómetros.

... (x+1): dos codos, dos dedos y 1/4 (JIMÉNEZ, 2004, pág. 37).

Grafía de los números fraccionarios

Los sabios egipcios adoptaron un sistema de notación diferente al nuestro. No definen los conceptos de numerador (el número de partes tomadas de un todo) y denominador (el número de partes en las que se divide un todo), escribiendo, salvo pocas excepciones (2/3 *r(ꜣ).wy* y 3/4 *ḥmt-r(ꜣ)* casi exclusiva de la Piedra de Palermo, pero no utilizada en los pro-

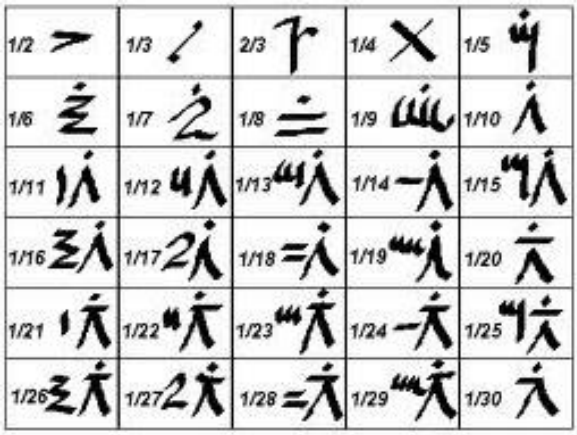


Ilustración 20. Grafía de los números fraccionarios en escritura hierática.

blemas matemáticos), fracciones de "numerador" unitario con el numeral correspondiente al "denominador" bajo el signo jeroglífico "ro"

, que representa pictográficamente una 'boca' y fonéticamente se corresponde con la 'r'. En cuanto a su significado, parece derivar de la preposición de la misma grafía 'relacionado con'[10].

El signo 2/3 es raro en la escritura jeroglífica. Un ejemplo puede encontrarse en el calendario del templo de Medinet Habu construido por Ramsés III. Se piensa que se inscribió con las dos líneas verticales de diferente longitud ( ) indicando la división de una longitud dada en una proporción 2:1 (GRIFFITH F. L., 1894, pág. 168)(ROBINS, 1987, pág. 12).

En la Piedra de Palermo existen grafías peculiares para las fracciones 1/2 ( )

Reinado de Khasekhemui. En el año de los Seguidores de Horus fue cuando se llevó a cabo la sexta ocasión del censo y el Nilo creció 2 codos, 4 palmos y 1/2 dedo (JIMÉNEZ, 2004, pág. 49).

Reinado de Seneferu. La construcción de la fortaleza del rey (en) el bajo Egipto y de las mansiones de Seneferu, (cuando se realizó) el transporte fluvial de 40 barcos repletos de cedro y el Nilo creció 2 codos y 2 dedos 1/2 (JIMÉNEZ, 2004, pág. 55).

... 1/4 ( )

Reinado de Djer. El año de la primera ocasión de la fiesta "djet[11]" el Nilo creció 4 codos 1/4 (JIMÉNEZ, 2004, pág. 36).

Reinado de Den. El año en que se golpeó a las tribus nativas el Nilo creció 4 codos 1/4 (JIMÉNEZ, 2004, pág. 37).

... y 2/3 ( ).

Reinado de Khaaekhemui. El año de los Seguidores de Horus (cuando se realizó) el recuento del séptimo censo del oro y de los campos y el Nilo creció 3 codos y 2/3 (JIMÉNEZ, 2004, pág. 50).

... y 3/4( ).

Reinado de Seneferu. El año de la construcción de los edificios "Ensalzada es la corona blanca de Seneferu" en la puerta del sur y "La corona roja de Seneferu" en la puerta del norte, de la fabricación con cedro de las puertas del palacio del rey, y de la octava ocasión del censo, (cuando) el Nilo creció2 codos, 2 palmos, 2 dedos y 3/4.

En hierático, el signo es representado por un punto encima del numeral correspondiente al "denominador" a excepción de las correspondientes a 1/2, 1/3, 2/3 y 1/4, como podemos ver en la figura anterior. En ocasiones este punto es suprimido por ser demasiado evidente en el contexto

En la mayoría de las transcripciones las fracciones se representan con una barra horizontal encima del numeral del "denominador" (así 1/5 se transcribe $\bar{5}$) menos 2/3 que lleva dos barras horizontales encima del 3 ($\bar{\bar{3}}$). Esta última tiene una gran importancia para las multiplicaciones y divisiones, pues se prefiere su cálculo en ellas es previo al de la fracción 1/3 (problemas 38, 43 y 67 del PMR).

En copto se añade al numeral correspondiente el prefijo **ⲣⲉ**. Así 1/4 se escribiría **ⲣⲉϥⲧⲱⲟⲩ**.

¿Cómo expresaban las fracciones con numerador diferente de la unidad? Los eruditos egipcios desarrollaron un sistema un poco farragoso para nuestra mentalidad, los escribían como una serie de sumandos de fracciones **distintas** de "numerador" unitario equivalente a la fracción original[12].

Es necesario remarcar que las fracciones eran diferentes. Por ejemplo, $\frac{2}{5}$ se escribe $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ y no como $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ (en el RMCL hay algunos ejercicios del alumno en los que suma dos fracciones iguales). El motivo por el que aplicaban este tipo de series se desconoce en la actualidad.

Como el método era muy complejo se hizo necesaria la creación de tablas de fracciones equivalentes a modo de nuestra "tabla de multiplicar" que estudiaremos posteriormente con detalle.

Esta metodología, que en principio parece tediosa, presenta algunas ventajas. Una ellas es la facilidad para comparar fracciones distintas. Hoy en día se estudia en los colegios que esta comparación necesita la transformación de las dos fracciones a un denominador común, el mínimo común múltiplo, el múltiplo menor de ellos. Cualquier alumno compararía $\frac{5}{8}$ y $\frac{4}{7}$ calculando el mínimo común deno-

minador, 56, obteniendo dos fracciones equivalentes a las dadas con denominador 56, $\frac{35}{56}$ (obtenida al multiplicar el numerador y el denominador por 7) y $\frac{32}{56}$ (obtenida al multiplicar el numerador y el denominador por 8) respectivamente, llegando a la conclusión que $\frac{35}{56} > \frac{32}{56}$, o lo que es lo mismo que $\frac{5}{8} > \frac{4}{7}$.

Un alumno egipcio lo haría de modo diferente.

$$\frac{5}{8} = \frac{4}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

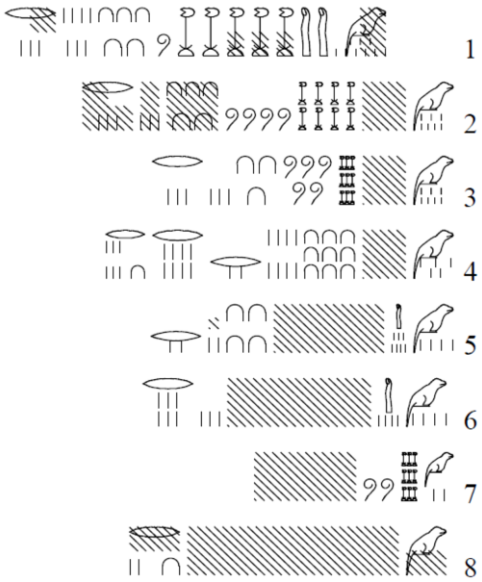
$$\frac{4}{7} = \frac{8}{14} = \frac{7}{14} + \frac{1}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14}$$

Al comparar ambos resultados se observa claramente que $\frac{1}{8} > \frac{1}{14}$ y por consiguiente $\frac{5}{8} > \frac{4}{7}$.

La forma de expresar las fracciones como la suma de una serie de fracciones de numerador unitario persistió a lo largo de milenios, desde el inicio del Egipto faraónico hasta la Grecia antigua, siendo utilizada por Fibonacci y los matemáticos árabes (KARPINSKI L. C., 1922, págs. 23-24).

Lista numérica del fragmento XLV.1 del PK

Se corresponde con el **problema 3** del PK. Contiene un listado de números a los que no se ha encontrado significado alguno. Son cantidades, en general, muy elevadas.



$925.157 + \overline{3}$
$708.453 + \overline{3}$
$709.533 + \overline{3}$
$500.098 + \overline{\overline{3}} + \overline{8} + \overline{16}$
$470.042 + \overline{\overline{3}}$
$440.003 + \overline{6}$
209.200
[...] $\overline{12}$

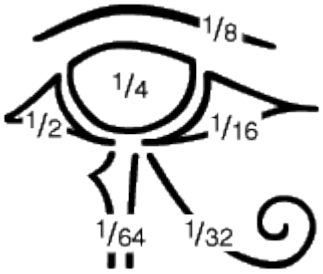
Como puede apreciarse hay bastantes huecos en el manuscrito que impiden la comprensión completa del fragmento.

Este ejercicio presenta una peculiaridad, las decenas y las centenas de millar no se expresan por repetición de signos iguales sino por la adición al signo correspondiente de los trazos verticales (en la línea 18 leemos para 500.000, en vez de) excepto del 20.000 de la primera línea que lleva repetido dos veces el signo 10.000 ( ).

Las fracciones enmascaradas en el ojo sagrado

En algunas ocasiones los egipcios ocultaban "los misterios" a los profanos. Es el caso del ojo sagrado, el dañado ojo de Horus, el udjat (*wḏ3t*), resumen de las fracciones de la unidad de capacidad, el *heqat*. En él se encuentran encerradas de forma críptica las potencias de "numerador" unitario que tienen como "denomi-

nador" las seis primeras potencias de 2, que dan lugar a seis signos jeroglíficos.



Así 1/2 es representado como , 1/4 como , 1/8 como , 1/16 como , 1/32 como y 1/64 como .

Uno de los primeros en observar que el "uadjet" estaba conformado por seis signos fue Möller (MÖLLER, 1911, pág. 99).

El significado criptográfico es aún mayor, pues representa el todo, la unidad, lo completo. Desde un punto de vista matemático las fracciones referidas constituyen una progresión geométrica (cada uno de los términos de la progresión se obtiene del anterior multiplicándolo por un número constante llamado razón) de seis términos, cuyo primer elemento es 1/2 y la razón 1/2 también.

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64}$$

Si aplicamos la fórmula para el cálculo de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica cuando la razón es menor que la unidad, caso que nos atañe

$$Suma_{\infty} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a_1 . r^n}{r - 1} - \frac{a_1}{r - 1}$$

... como $n \to \infty$, el primer término se anula al ser la razón inferior a la unidad, quedando

$$Suma_{\infty} = \frac{a_1}{1 - r}$$

... que aplicado a nuestra serie es

$$Suma_{\infty} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

... la unidad (ROBINS, 1987, pág. 15), el ***uno***. Forma muy curiosa de esconder a la unidad creadora, como suma de todas las partes.

Si realizamos la suma de las fracciones de la serie

$$Suma_6 = \frac{a_1(r^6 - 1)}{r - 1} = \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{63}{64}$$

... faltaría 1/64 para completar la unidad. Es posible que la reconstitución del ojo de Horus por el dios Djehuty (Thot) que vimos en el capítulo 17 del Libro de los Muertos se refiriera a la adición de 1/64 al ojo para completar la unidad, el todo (ROBINS, 1987, pág. 15).

Los auxiliares rojos

Los escribas siempre portaban sus instrumentos de trabajo, un pincel y una paleta con dos hendiduras para las tintas negra y roja. Se han esgrimido cuatro razones para el uso de la tinta roja en los papiros egipcios: enfatizar un elemento del texto, dividir un texto en diferentes secciones, aislar una palabra y diferenciar distintas categorías (POSENER, 1951, págs. 75-80).

Los auxiliares rojos son números de referencia que el escriba del PMR enfatiza en determinados problemas relacionados con un denominador común. Con ellos evita el trabajar con fracciones pasando a utilizar números enteros. El matemático suele escoger el valor más alto de los "denominadores" envueltos en las operaciones. En realidad se basa en dividir una suma de fracciones por un número y, una vez operado, volver a multiplicar por él (CLAGETT, 1999, pág. 40).

Por ejemplo, siguiendo a Gillings (GILLINGS, 1972) , en el **problema 34** del PMR el egipcio tiene que solucionar un ejercicio que hoy en día sería tratado como una ecuación de primer grado con una incógnita.

El ejercicio es el siguiente

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 1$$

La solución aportada por el escriba es

$$x = 5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}$$

El problema surge al realizar la prueba. Al comprobar que dicha cantidad sumada a su mitad y a su cuarta parte dan 10.

1	5 1/2 1/7 1/14
1/2	2 1/2 1/4 1/14 1/28
1/4	1 1/4 1/8 1/28 1/56
	10

El escriba tiene que sumar la columna de la derecha para alcanzar el valor 10. Para ello separa los números enteros y las fracciones hasta 1/8, exceptuando 1/7, que sumados dan 9 1/2 1/8, faltando 1/4 1/8. Ahora tiene que demostrar que las fraccione pequeñas suman 1/4 1/8. Para ello utilizará los **auxiliares rojos**. Escoge como valor base el denominador mayor, el 56.

1/7	1/14	1/14	1/28	1/28	1/56
8	**4**	**4**	**2**	**2**	**1**

Los números de la fila inferior son los auxiliares rojos.

Sabe que 1/4 de 56 es 14 y 1/8 de 56, 7. En total 21.

Ahora suma los auxiliares rojos y obtiene el valor de 21. Lo que le faltaba para completar la suma.

Un cuaderno de deberes. Los ejercicios del RMCL

Este documento parece, sin duda, el trabajo de un estudiante de matemáticas. Consta de dos copias de una serie de ejercicios de suma de fracciones de "numerador" unitario. La expresión jeroglífica utilizada es una proposición de predicado sustantivo bipartita con *pw* (Esto es...).

El texto hierático de una de las copias, escrito de derecha a izquierda, se muestra encima como lo transcribió Glandville y su traducción más abajo en la que solamente se representa el valor de los "denominadores" excepto para la fracción 2/3 (fila 7) (GLANDVILLE, 1927). La columna de números romanos de la derecha (método) da el número de procedimiento utilizado posteriormente para el cálculo inverso del ejercicio según Gardner (GARDNER, 2002), cómo obtener la serie de fracciones en las que puede descomponerse la fracción inicial.

Línea	Serie	Resultado	Método
1	10 + 40	8	V

2	5 + 20	4	IV
3	4 + 12	3	IV
4	10 + 10	5	I
5	6 + 6	3	I
6	6 + 6 + 6	2	I
7	3 + 3	2/3	I
8	25 + 15 + 75 + 200	8	V
9	50 + 30 + 150 + 400	16	V
10	25 + 50 + 150	16 [15][13]	V
11	9 + 18	6	II
12	7 + 14 + 28	4	V
13	12 + 24	8	II
14	14 + 21 + 42	7	III
15	18 + 27 + 54	9	III
16	12 [22] + 33 + 66	11	III
17	28 + 49 + 196	[13]	
18	30 + 45 + 90	15	III
19	24 + 48	16	II
20	18 + 36	12	II
21	21 + 42	14	II
22	45 + 90	30	II
23	30 + 60	20	II
24	15 + 30	10	II
25	48 + 96	32	II
26	96 + 192	64	II

Es curioso el hecho de que el escriba se ejercite en la suma de fracciones iguales, cuando éstas no aparecen como series en las tablas, pero las primeras sumas que aprendemos en nuestras escuelas son de estas características. Se ha querido ver una utilidad en ellas cuando se realizan combinaciones (GILLINGS, 1972). Si se combinan los ejercicios de las líneas 5 y 6 se obtiene el equivalente a la fracción 1/2.

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

El paréntesis es el ejercicio 5 y la suma completa el ejercicio 6.

Una combinación más compleja se realiza entre las líneas 7 y 5. Según la línea 7

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$$

... como la línea 5 nos da para 1/3 la suma de dos fracciones iguales 1/6 + 1/6, podemos sustituir su valor en la suma anterior.

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$$

Si observamos la combinación obtenida de las líneas 5 y 6 (en rojo) podemos sustituir, quedando

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$$

Queda por resolverse la línea 17. Un examen detallado del RMCL nos hace ver que existen varios errores en la tabla, uno al copiar el ejercicio a realizar (línea 16), y otros dos en el resultado (líneas 10 y 17). En la línea 10 puede tratarse de un error tipográfico, pero no así el de la línea 17, pues la suma es

$$\frac{1}{28}+\frac{1}{49}+\frac{1}{196}=\frac{3}{49}$$

... no $\frac{3}{39}=\frac{1}{13}$ como encontramos en el resultado dado por el alumno.

Para que el resultado hubiera sido $\frac{1}{13}$, la suma tendría que haber sido $\frac{1}{26}+\frac{1}{39}+\frac{1}{78}$ (GILLINGS, 1972), alejada de la que aparece en la tablilla. Si la respuesta correcta fuera $\frac{1}{14}$, las fracciones a sumar tendrían que haber sido $\frac{1}{28}+\frac{1}{49}+\frac{3}{196}$, lo que no es coherente ni con el propio ejercicio ni con la utilización de las fracciones por los egipcios que no admiten "numeradores" superiores a la unidad excepto 2/3 y 3/4. Otra posibilidad es que se hubiera omitido una fracción intermedia $\frac{1}{98}$. En este supuesto el ejercicio sería $\frac{1}{28}+\frac{1}{49}+\frac{1}{98}+\frac{1}{196}$. Aplicando el procedimiento III del anexo 1 (métodos propuestos para la construcción de las series de numerador unitario) la suma de fracciones que da como resultado $\frac{1}{14}$ sería muy distinta ($\frac{1}{28}+\frac{1}{42}+\frac{3}{84}$).

La serie de fracciones de numerador unitario en la que se descompone $\frac{3}{49}$ es fácil de hallar utilizando los valores de la tabla 2/n del PMR. En ésta, para la fracción $\frac{2}{49}$ se obtiene la serie $\frac{1}{28}+\frac{1}{196}$ que su-

mada a $\frac{1}{49}$, da la serie que aparece en el RMCL.

Pensar que el resultado dado por el alumno es una aproximación no es consistente, porque se alejaría mucho de la realidad.

Un hecho interesante, que conviene anotar, es que la fracción de "denominador" más elevado estudiada es 64, el mayor "denominador" del ojo de Horus.

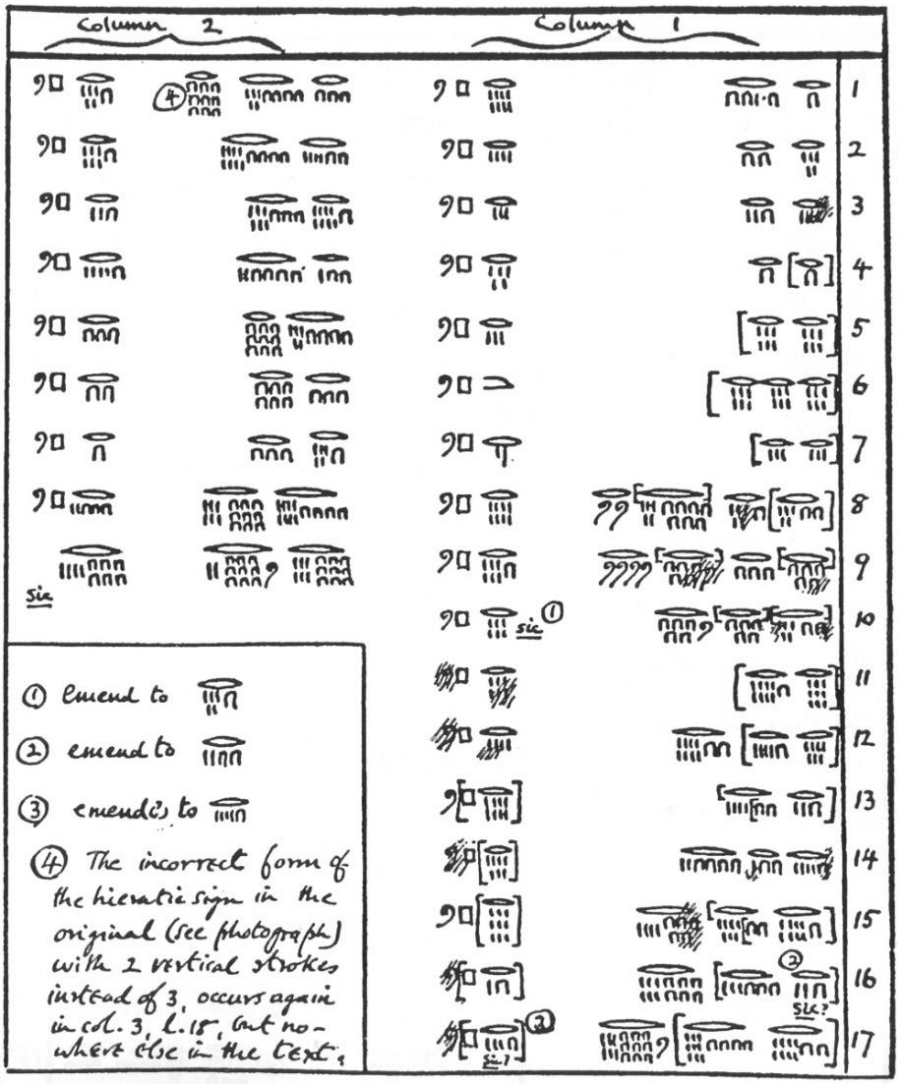


Ilustración 21. Transcripción hierática de una de las copias del RMCL (GLANDVILLE, 1927).

¿Cómo realizaría el estudiante egipcio las sumas de fracciones?

Como es evidente, no conocemos en la actualidad la forma concreta mediante la que el estudiante realizó las sumas, pero pode-

mos establecer una hipótesis que nos facilite la comprensión.

Tomemos como ejemplo la línea 10 del RMCL

$$\frac{1}{25}+\frac{1}{50}+\frac{1}{150}=\frac{1}{15}$$

En primer lugar tomaría como número base un "denominador" común" que no tiene que coincidir con el m. c. m. (mínimo común múltiplo[14]), habitualmente el valor del "denominador" mayor (m = 150)

25	50	150	
6	3	1	10

Ahora basta con dividir el "denominador" mayor entre la suma de los valores obtenidos tomando como base m.

1	10
10	100
5	50
15	150

La respuesta es la fracción que tiene como "denominador" 15.

Un procedimiento sencillo y asequible al estudiante.

Para aquellas sumas en la que se ven implicados dos sumandos fraccionarios se ha propuesto su resolución mediante la **regla G** que dice **si el denominador de una de las dos fracciones es k veces el otro, la suma de la serie tendrá como denominador el resultado de dividir el denominador más grande entre k+1** (GILLINGS, 1972), explicada exhaustivamente en el anexo 1.

Las tablas 2/n

Al comienzo del PMR, tras la datación del documento, en algo más que la tercera parte del manuscrito, en el recto del papiro BM 10058, el escriba Ahmosu creó una pequeña tabla para la descomposición de fracciones 2/n en sumas de series de fracciones de "numerador" unitario, tomando n como los números impares desde el 3 hasta el 101. No tiene sentido que las fracciones con "denominador" par que se incluyan en la tabla, pues basta con dividir el "numerador" y el "denominador" entre 2.

Esta tabla parece haberse generado a partir de **números auxiliares** que suelen tener en cuenta en algún paso de su procedimiento

los divisores del "denominador común", no siempre coincidente con nuestro mínimo común múltiplo. El PMR utiliza más de una decena de auxiliares para confeccionar la tabla, casi todos ellos, a excepción del 3, pares (2, 4, 6, 8, 12, 20, 24, 30, 36, 40, 56, 60 y 70).

Sin duda las diversas tablas encontradas en distintos documentos (PMR, PK, Papiro de Akhmîm, Papiro Michigan...) son de gran ayuda para el cálculo de las operaciones matemáticas, sobre todo la multiplicación y la división.

El conocimiento de estas tablas permite calcular con facilidad fracciones con numeradores distintos de 2. Para las fracciones 3/n basta con sumar 1/n + 2/n, para las 4/n se multiplica por 2 el valor de 2/n, para la 5/n se suma 1/n + 2(2/n), y así sucesivamente.

La tabla 2/n del PMR se muestra continuación.

Tabla 1. Recto del papiro BM 10058 con la tabla 2/n del PMR.

2/3	2/3	**2/53**	1/30 1/318 1/795
2/5	1/3 1/15	**2/55**	1/30 1/330
2/7	1/4 1/28	**2/57**	1/38 1/114
2/9	1/6 1/18	**2/59**	1/36 1/236 1/531
2/11	1/6 1/66	**2/61**	1/40 1/244 1/488 1/610
2/13	1/8 1/52 1/104	**2/63**	1/42 1/126
2/15	1/10 1/30	**2/65**	1/39 1/195
2/17	1/12 1/51 1/68	**2/67**	1/40 1/335 1/536
2/19	1/12 1/76 1/114	**2/69**	1/46 1/138
2/21	1/14 1/42	**2/71**	1/40 1/568 1/710
2/23	1/12 1/276	**2/73**	1/60 1/219 1/292 1/365
2/25	1/15 1/75	**2/75**	1/50 1/150
2/27	1/18 1/54	**2/77**	1/44 1/308
2/29	1/24 1/58 1/174 1/232	**2/79**	1/60 1/237 1/316 1/790
2/31	1/20 1/124 1/155	**2/81**	1/54 1/162
2/33	1/22 1/66	**2/83**	1/60 1/332 1/415 1/498
2/35	1/30 1/42	**2/85**	1/51 1/255
2/37	1/24 1/111 1/296	**2/87**	1/58 1/174
2/39	1/26 1/78	**2/89**	1/60 1/356 1/534 1/890
2/41	1/24 1/246 1/328	**2/91**	1/70 1/130
2/43	1/42 1/86 1/129 1/301	**2/93**	1/62 1/186
2/45	1/30 1/90	**2/95**	1/60 1/380 1/570
2/47	1/30 1/141 1/470	**2/97**	1/56 1/679 1/776
2/49	1/28 1/196	**2/99**	1/66 1/198
2/51	1/34 1/102	**2/101**	1/101 1/202 1/303

1/606

La mayoría de las primeras fracciones de las series, a excepción de las correspondientes a 2/5, 2/25, 2/85 y 2/101 tienen "denominadores" pares, y 17 de ellas, con "denominadores" terminados en 0, cuando el promedio debería ser 8,12. Parece lógico que el egipcio probara primero con fracciones de "denominadores" terminados n 0 y si conseguía una serie convincente la dejaba.

La descomposición en suma de fracciones no siempre se corresponde con los valores obtenidos en la tabla 2/n del PMR. En el ostracon 153 procedente de la tumba tebana 71 perteneciente a Senenmut, un alto dignatario de la corte de la reina Hatshpesut (XVIII dinastía), excavada en la colina de Qurna, en la orilla occidental de Tebas, muestra que la fracción 2/7 se descompuso en una serie de tres sumandos, 1/6 1/14 1/21, no en una de dos, 1/4 1/28, valor del PMR (HAYES W. C., 1942, págs. 29-30), La serie del PMR tiene la teniendo la ventaja de presentar "denominadores" pares (ROBINS, 1987, pág. 34).

Ilustración 22. Ostraca 153 encontrado en la tumba del arquitecto de la reina Hatshepsut, Senenmut, donde aparece una descomposición en fracciones de "numerador" unitario de 2/7 (HAYES W. C., 1942).

Un estudio detallado de la tabla nos permite observar que la primera fracción siempre tiene, excepto en el caso de 2/5, 2/25, 2/65 y 2/85, todos múltiplos de 5, y la 2/101, "denominador" par, siendo la última cifra del primer "denominador" más frecuente el 0 (17 veces de 44).

En la tabla inferior se muestra el número de veces que se repite la cifra final de la primera fracción par en las series del PMR.

0	2	4	6	8
17	7	8	7	5

Aunque no podemos hablar de una fórmula general para la

confección de la tabla 2/n del PMR, un examen detenido nos permite ver lo que el amanuense aplica para la descomposición en la serie cuando se trata de "denominadores" múltiplos de números primos. Cuando el "denominador" es múltiplo de 3, rompe el numerador en dos: 3/2 +1/2; cuando es 5, 5/3 + 1/3; cuando es 7, 7/4 + 1/4; cuando es 11, 11/6+1/6;...

Si observamos la progresión aritmética de los impares 1, 3, 5, 7, 9, 11,... podemos establecer una fórmula general para los factores que se utilizan

$$\frac{2}{kp} = \frac{1}{k}\left(\frac{p}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

... siendo 'p' el número primo, 'k' el factor que multiplica al número primo, y 'n' la posición del primo en la progresión de números impares.

Esto no se cumple para todas las fracciones de la tabla, pero si en muchas de ellas.

Un estudio de las diferentes teorías presentadas en la bibliografía sobre la construcción de las tablas 2/n se muestra en el anexo 1 (conversión de las fracciones de "numerador" no unitario en la suma de una serie de fracciones de "numerador" unitario. Método de Milo Gardner).

Si comparamos la tabla 2/n del PMR con los manuscritos copto-griegos que solamente 7 de las fracciones del PMR se encuentra en ellos. Llama la atención que el escriba del Papiro de Akhmîm selecciona para la fracción 2/13 una serie de dos términos (1/7 1/91), mientras que el del PMR escoge una de tres (1/8 1/52 1/104) (KARPINSKI L. C., 1922, pág. 24).

Como vimos más arriba, en el ostraca 153 encontrado en la tumba del arquitecto Senenmut (XVIII dinastía) se prefiere descomponer 2/7 en una secuencia seriada de tres términos (1/6 1/14 1/21) que en la serie de dos términos del PMR (1(4 1/28) (HAYES W. C., 1942, págs. 29-30).

Reglas para la elección de las series de fracciones por los egipcios

Gillings (GILLINGS, 1972, pág. 49) expone una serie de reglas

que presumiblemente pudo utilizar el sabio egipcio para escoger la serie de sumandos con las mejores características para ser utilizada posteriormente en los cálculos numéricos.

1. Nunca se repiten fracciones iguales en las series de sumas y son colocadas en orden decreciente. Entre las diversas posibilidades optan por aquellas con "denominadores" más pequeños que nunca sobrepasan 890.

2. Aquellas series de menor número de sumandos se seleccionan frente a las más largas, no utilizándose nunca una serie de más de cuatro términos. Hay excepciones, para la fracción 2/71 se escoge la serie 1/40 + 1/568 + 1/710, cuando existe una serie de dos sumandos 1/36 + 1/2556 con un segundo "denominador" muy elevado.

3. Se eligen las series cuyo primer "denominador" es más pequeño siempre que se cumplan las reglas precedentes. Para 2/55 existen cuatro posibilidades con dos sumandos diferentes: 1/28 + 1/1540, 1/30 + 1/330 (presente en la tabla 2/n del PMR), 1/33 + 1/165 y 1/40 + 1/88. Se desecha la primera porque el segundo "denominador" es demasiado grande.

4. Un estudio detallado del PMR demuestra que los "denominadores" pares se prefieran a los impares, sobre todo para la primera fracción. Solamente presentan "denominadores" impares las fracciones 2/25, 2/85 y 2/101.

Los "denominadores" de las series más cortas posibles para la tabla 2/n del PMR se muestran abajo. En rojo las encontradas en el papiro.

9	5 + 45 6 + 18
13	7 + 91 (el egipcio escribe una serie de tres 8 + 52 + 104)
15	8 + 120 9 + 45 10 + 30 12 + 20
17	9 + 153 (la serie del papiro es 12 + 51 + 68)
19	10 + 190 (12 + 76 + 114 en el papiro)
21	11 + 231 12 + 84 14 + 42 15 + 35
25	13 + 325 15 + 75
27	14 + 378 15 + 135

	18 + 54
29	15 + 435 (24 + 58 + 174 + 232 en el papiro)
31	16 + 496 (20 + 124 + 155 en el papiro)
33	17 + 561 18 + 198 21 + 77 22 + 66
35	18 + 630 20 + 140 21 + 105 30 + 42
37	19 + 703 (24 + 111 + 296 en el papiro)
39	20 + 780 21 + 273 24 + 104 26 + 78
41	21 + 861 (24 + 246 + 328 en el papiro)
43	22 + 946 (42 + 86 + 129 + 301 en el papiro)
45	24 + 360 25 + 225 27 + 135 30 + 90 35 + 63 36 + 60
51	27 + 459 30 + 170 34 + 102
55	30 + 330 33 + 165 40 + 88
57	30 + 570 33 + 209 38 + 114
63	33 + 693 35 + 315 36 + 252 42 + 126 45 + 105 56 + 72
65	35 + 455 39 + 195 45 + 117
69	36 + 828 39 + 299 46 + 138
75	39 + 975 40 + 600 42 + 350 45 + 225 50 + 150 60 + 100
77	42 + 462 44 + 308 63 + 99
81	45 + 405 54 + 162
85	45 + 765 51 + 255 55 + 187

87	48 + 464 58 + 174
91	49 + 637 52 + 364 70 + 130
93	51 + 527 62 + 186
95	50 + 950 57 + 285 (60 + 380 + 570 en el papiro) 60 + 228
99	54 + 594 55 + 495 63 + 231 66 + 198 90 + 110

Propuesta de Robins para el cálculo de las series

Este autor establece un método para el cálculo de las series de fracciones de "numerador" unitario equivalentes a las fracciones 2/n, basado en una secuencia de 7 puntos que intentaremos explicar con 2/67, inspirada en los trabajos anteriores de Hultsch (1895, págs. 169-171) y Bruins (1952, págs. 81-91) y (1957, págs. 253-263).

a) El matemático escogería un número mayor que n/2. Al dividir 67 entre 2 obtenemos 33,5, por lo que cualquier número superior a 33 serviría. Teniendo en cuenta que los egipcios prefieren los números pares, optaríamos por 38, 40,... El egipcio prefiere 40, valor que selecciona, suponemos, tras comprobar que las fracciones obtenidas con 38 son menos útiles para su propósito.

b) Resta del "denominador" inicial el valor escogido para el "denominador" de la primera fracción (67 – 40 = 27).

c) Descompone el resultado en sumandos de divisores del primer "denominador" (27 = 20 + 5 + 2, todos ellos divisores de 40).

d) Multiplica 1/40 por los valores obtenidos: 1/40 (20 + 5 + 2) = 1/2 1/8 1/20.

e) Resta estos valores de la unidad: 1 – (1/2 1/8 1/20) = 1/5 1/8.

f) Multiplica las fracciones obtenidas por 1/n, en nuestro caso por 1/67, obteniendo 1/335 1/536.

g) Ahora pone la descomposición completa de la fracción 2/n añadiendo la primera escogida (2/67 = 1/40 + 1/335 + 1/536).

Profundicemos en el desarrollo matemático de este método. Tras haber elegido la primera fracción 1/40, 2/67 quedaría como

$$\frac{2}{67} = \frac{1}{40} + x$$

Restamos 1/67 en cada uno de los miembros de la ecuación anterior.

$$\frac{2}{67} - \frac{1}{67} = \frac{1}{40} - \frac{1}{67} + x$$

$$\frac{1}{67} = \frac{1}{40} - \frac{1}{67} + x$$

Restamos 1/40 – 1/67

$$\frac{1}{40} - \frac{1}{67} = \frac{67-40}{40x67} = \frac{27}{40x67} = \frac{20+5+2}{40x67} = \frac{1}{67}.\frac{(20+5+2)}{40} =$$

$$= \frac{1}{67}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{20}\right)$$

Valor que sustituimos en la ecuación previa

$$\frac{1}{67} = \frac{1}{40} - \frac{1}{67} + x = \frac{1}{67}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{20}\right)$$

Despejamos x

$$x = \frac{1}{67} - \frac{1}{67}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{67}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{67}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8}\right)$$

... lo que nos da los valores que faltan para completar la serie de sumandos.

$$\frac{2}{67} = \frac{1}{40} + \frac{1}{335} + \frac{1}{536}$$

De haber escogido como primer "denominador" el 38, no sería posible realizar el paso c porque la diferencia 29 (67 – 38) no se puede descomponer en divisores que sumen 38. Si el valor elegido hubiera sido el 42, la diferencia 25 (67-42) se podría descomponer en los divisores 21 + 3 + 1, que multiplicados por 1/42 daría lugar a las fracciones 1/2 1/14 1/42 que restadas de la unidad se convierten en 1/3 1/14, valores que hay que multiplicar por 1/67 para obtener las fracciones deseadas: 1/201 1/938. Como podemos observar la última fracción tiene el "denominador" demasiado elevado para que pueda ser escogida por el matemático egipcio.

La tabla 2/n del papiro de Kahun (PK)

Una tabla semejante a la inscrita en el PMR, de dimensiones más reducidas, se encuentra el fragmento matemático IV.2 del PK (UC 32159) y muestra las series de sumandos de "numerador" unitario correspondiente a las fracciones 2/n con "denominadores" impares comprendidos entre 3 y 21, ambos inclusive. Los resultados obtenidos son similares a los del PMR lo que es sorprendente teniendo en cuenta las múltiples posibilidades que existen para componer las series.

Un esquema de la tabla se expone a continuación.

Denominador de la fracción *2/n*	Fracción inicial	Producto	Serie
3	2/3	2	
5	1/3	1 + 2/3	1/3 + 1/15
7	1/4	1 + 1/2 + 1/4	1/4 + 1/28
9	1/6	1 + 1/2	1/2 es 1/18 [1/6 + 1/18]
11	1/6	1 + 2/3 + 1/6	1/6 + 1/66
13	1/8	1 + 1/2 + 1/8	1/8 + 1/52 + 1/104[15]
15	1/10	1 + 1/2	1/2 es 1/30 [1/10 + 1/30]
17	1/12	1 + 1/3 + 1/12	1/12 + 1/51 + 1/68
19	1/12	1 + 1/2 + 1/12	1/12 + 1/76 + 1/114
21	1/14	1 + 1/2	1/2 es 1/42 [1/14 + 1/42]

Un esquema se muestra en la tabla anterior. En la primera columna el "denominador" de la fracción 2/n; en la segunda unas fracciones en orden decreciente que el escriba considera bases (sin descomponerlas en una serie), con la repetición por dos veces de 1/6 y 1/12, que representan la fracción inicial de la serie numérica unitaria; en la tercera el resultado de multiplicar dicha fracción por el "denominador" de la fracción inicial; en la cuarta el resultado dado para la serie equivalente.

En las celdas oscuras no se ha escrito la serie equivalente sino

la multiplicación de 1/n por 1/2, la fracción del producto (1/n x 1/9 = 1/18 en la cuarta línea), con la que se obtiene el segundo sumando de la verdadera serie equivalente que aparece entre corchetes.

Veamos como crea el sabio amanuense la tabla. Comenzamos con la fracción 1/n, sabiendo que "a" es el denominador de la fracción inicial y p el cociente entre n/a.

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{a}.\frac{a}{n}=\frac{1}{a}.\frac{1}{\frac{n}{a}}=\frac{1}{a}.\frac{1}{p}$$

Si multiplicamos por 2 obtenemos

$$\frac{2}{n}=\frac{2}{a}.\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{a}{2}}.\frac{1}{p}$$

El escriba podría calcular el inverso de "p", operación que los egipcios realizaban con frecuencia y dividirla por la mitad de "a" para llegar a la serie.

Estudiemos la fracción 2/11. Según la tabla del PK "p" es 1 2/3 1/6. El valor de a = 6. Primero calcula el inverso de "p" obteniendo 1/2 1/22 (los inversos y las divisiones se estudiaran en el capítulo dedicado a las operaciones básicas), valor que se divide por la mitas de "a", 3, resultando

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$$

...como enseña el papiro.

Un desarrollo matemático más complejo para llegar a la serie se muestra en el anexo 1 en el epígrafe "desarrollo de la tabla 2/n del PK".

Aquí estudiaremos el desarrollo de las celdas coloreadas. Conocemos que

$$\begin{cases}\frac{2}{n}=\frac{2}{a}.\frac{1}{p}\\ \frac{2}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\end{cases}$$

... por lo que

$$\frac{2}{ap}=\frac{b+a}{ab}$$

$$p = \frac{2b}{b+a}$$

Conocemos que el valor de p de esas celdas es 1 1/2 = 3/2 que sustituidos en la ecuación anterior nos da

$$\frac{3}{2} = \frac{2b}{b+a}$$

$$3b + 3a = 4b$$

$$3a = b$$

Como sabemos que a = n/p

$$\frac{3n}{p} = b$$

... y p = 3/2 que aplicado en la fórmula anterior nos lleva a

$$2n = b$$

... el valor que aplica el sabio egipcio en las celdas coloreadas.

Tomemos como ejemplo 2/15. Según hemos demostrado la serie se construye como 1/a más 1/b siendo "b" dos veces "n". Efectivamente, 2/15 es igual a 1/10 (a = 10) más 1/30 (2 por 15).

La generación de esta tabla depende, sin duda, del valor de "a", que estudiaremos en profundidad. ¿Cómo podemos calcular el denominador de fracción inicial? Si dividimos n/2 y tomamos el par siguiente al resultado del cociente obtenemos el valor de "a" para las fracciones con denominador inferior a 14 según se muestra en la siguiente tabla.

Denominador de la fracción 2/n	Cociente n/2	Valor de a
3	-	
5	-	
7	7/2 = 3,5	4
9	9/2 = 4,5	6
11	11/2 = 5,5	6
13	13/2 = 6,5	8

Para los "denominadores" superiores a 15 de la tabla del PK

no se utiliza como valor de "a" el número par siguiente al resultado del cociente sino el segundo par.

Denominador de la fracción 2/n	Cociente n/2	Valor de a
15	15/2 = 7,5	10
17	17/2 = 8,5	12
19	19/2 = 9,5	12
21	21/2 = 10,5	14

En un manuscrito copto guardado en el museo Británico de Londres (manuscritos orientales 5707) se conservan tablas matemáticas en su primera parte (CRUM, 1905, págs. 256-257):

a) Toma los números enteros entre 7 y 10 y los múltiplos de 10 hasta 9.000, y los multiplica sucesivamente por 1, 10, 100, 1.000.

b) Toma los enteros hasta el 9 y los múltiplos de 10 hasta el 10.000 y los multiplica por las fracciones 2/3, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10, 1/12,1/15, 1/16, 1/20, 1/24, 1/48.

La segunda parte es un compendio de problemas irregulares y de difícil comprensión, siempre en relación con medidas, divididos en seis secciones (CRUM, 1905, págs. 257-259):

a) 18 problemas relacionados con medidas tierras.

b) 14 problemas relacionados con medidas de capacidad.

c) 16 problemas relacionados con otras medidas de capacidad.

d) 15 problemas relacionados con medidas de grano.

e) 9 problemas relacionados con medidas de capacidad.

f) 8 problemas relacionados con medidas de líquidos.

En el Wadi Sarga, un desfiladero entre los farallones rocosos de la orilla occidental del Nilo, a unos 25 Km. al sur de Licópolis (Assiut) existe un yacimiento arqueológico copto.

Ilustración 23. Monasterio de Apa Thomas en el wadi Sarga (fuente: museo Británico de Londres).

Entre sus ruinas se encontraron una serie de documentos de época bizantina de los que entresacamos los de importancia matemática. Seis de ellos muestran una serie de tablas de multiplicar por 7, por 1/ y 1/11, así como otras multiplicaciones fraccionarias (CRUM W. E., 1922, págs. 53-57)[16], mientras que el sexto no ha sido descifrado con seguridad.

Las tablas de productos de 2/3

En los papiros matemáticos no solo se inscribieron tablas para la transformación de las fracciones 1/n y 2/n en suma de una serie de fracciones de numerador unitario. Algunos ejercicios aportan pequeñas tablas con diversos productos, incluso en uno de ellos, el **problema 61B** del PMR, se nos muestra como realiza el escriba la tabla 2/3 por 1/n.

Problema 61B del PMM

Cómo calcular los 2/3 de los inversos de números impares. Si se te dice ¿cuáles son los 2/3 de 1/5? Tomas el denominador del inverso de 2 cinco veces y el de 6 otras cinco veces. Debes hacer lo mismo para calcular los 2/3 de los inversos de los demás números impares.

$$\frac{2}{3x5} = \frac{1}{2x5} + \frac{1}{6x5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$$

En realidad el escriba calcula la equivalencia de la fracción 2/15, obteniendo el mismo valor que aparece en la tabla 2/n del

PMR. Si generalizamos, deberíamos obtener los valores que aporta la tabla para las fracciones con denominadores múltiplos de 3, y se cumple para la totalidad de ellos.

En el papiro griego de Akhmîm, de época ptolemaica, un documento de 31,5 cm por 27,5 cm. se muestra una tabla de multiplicaciones de la fracción 2/3 por distintos números enteros hasta el 10000 (BAILLET, Le papyrus mathématique d'Akhmîm, 1892, págs. 19-31).

Las tablas de divisiones entre 10

En el verso del papiro BM 10058 justamente antes del comienzo de los problemas el matemático egipcio ha inscrito una pequeña tabla con las divisiones de los nueve primeros dígitos entre 10.

1 entre 10 igual a 1/10

2 entre 10 igual a 2/10 = 1/5

3 entre 10 igual a 3/10 = 2/10 + 1/10 =1/5 + 1/10

4 entre 10 igual a 4/10 = 2/5 =1/3 1/15, valor de la tabla 2/n del PMR

5 entre 10 igual a 5/10 = 1/2

6 entre 10 igual a 6/10 = 5/10 + 1/10 = 1/2 + 1/10 (no lo calcula como 3/5 = 2/5 + 1/5 = 1/3 1/5 1/15)

7 entre 10 igual a 7/10 = 2/3 + 1/30 (observamos como el escriba utiliza la fracción 2/3 en cuanto puede)

8 entre 10 igual a 8/10 = 7/10 + 1/10 = 2/3 + 1/10 + 1/30
9 entre 10 igual a 9/10 = 7/10 + 2/10 = 2/3 + 1/5 + 1/30

Hipótesis para el cálculo de fracciones de "numerador" superior a 2

Parece evidente que tanto en el campo de las Matemáticas nomo en la vida cotidiana el egipcio se encontraría con repartos distintos a las 1/n y 2/n. El profesor Cantor sugirió un sistema basado en sumas de fracciones conocidas presentes en las tablas (GRIFFITH F. L., 1897, pág. 201).

Descompongamos 5/11 en una serie de fracciones de "numerador" unitario.

$$\frac{5}{11}=\frac{1}{11}+\frac{2}{11}+\frac{2}{11}$$

... conociendo por la tabla 2/n que 2/11 es 1/6 1/66 llegaría a la conclusión que

$$\frac{5}{11}=\frac{1}{11}+\frac{1}{6}+\frac{1}{66}+\frac{1}{6}+\frac{1}{66}=\frac{1}{11}+\frac{2}{6}+\frac{2}{66}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{33}$$

Si los resultados de la primera simplificación no tuvieran "denominadores" pares, volvería a recurrir a la tabla 2/n para realizar la descomposición.

$$\frac{4}{25}=\frac{2}{25}+\frac{2}{25}=\frac{1}{15}+\frac{1}{75}+\frac{1}{15}+\frac{1}{75}=\frac{2}{15}+\frac{2}{75}$$

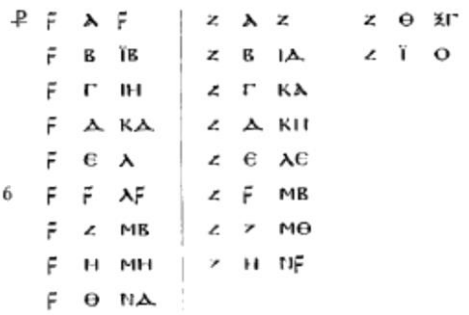
... consultando de nuevo la tabla 2/n

$$\frac{4}{25}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{50}+\frac{1}{150}$$

Aunque el procedimiento es sugerente, es probable, al menos en algunas ocasiones, que los matemáticos egipcios se limitaran a realizar la división, procedimiento que empleamos en la actualidad para pasar una fracción a número decimal, el inverso de calcular la fracción generatriz.

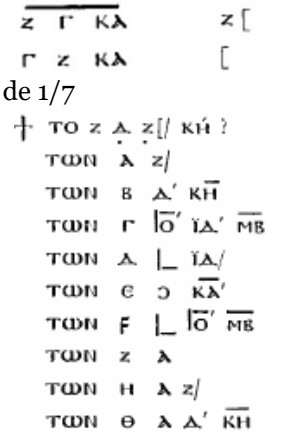
---

[9] Se dice que un número es decimal exacto cuando presenta un número finito de cifras decimales. Los periódicos puros, tras la coma, repiten indefinidamente una secuencia numérica, mientras que en los mixtos, antes de la repetición secuencial hay una o varias cifras no repetidas.
[10] "Comparación", "proporción" (GRIFFITH F. L., 1894, pág. 169).
[11] Es la fiesta de la eternidad, lo que supondría que el cómputo de años relacionado con la estrella Sirio comenzaría en este momento (JIMÉNEZ, 2004, págs. 36, nota 98).
[12] Se puede encontrar un programa que convierte fracciones en series de numerador unitario en www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fractions/egyptian.html#intro.
[13] Los números entre corchetes son las correcciones al ejercicio, los errores que ha cometido el supuesto alumno.
[14] El m. c. m. se calcula descomponiendo los números en factores primos y escogiendo los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.
[15] El escriba invierte el orden de las fracciones unitarias segunda y tercera intercalando entre ellas ¼.
[16] El documento número 22 es una tabla del 7 y del 6.

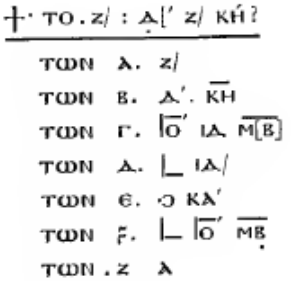


El número 23 es una tabla del 7.

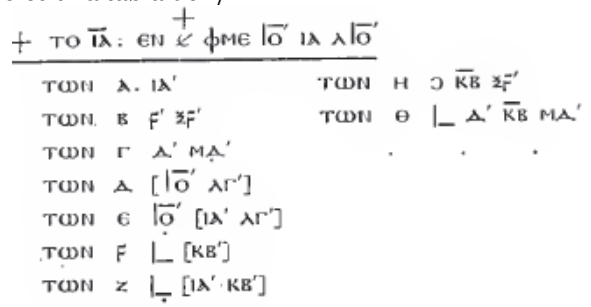
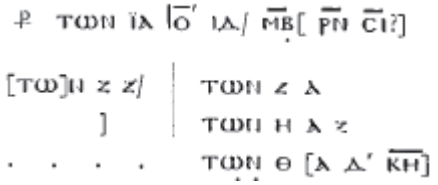
El número 24 es una tabla de 1/7



El número 25 otra tabla de 1/7



El número 26 es una tabla de 1/11



El número 27 tiene una multiplicación de 1/25 por 11 dando 1/3 1/14 1/42 [1/150 1/210], junto con un tabla de 1/49 por 7, 8 y 9.